

Midtsemester Eksamen FYS3410

30.03.2009

Varighet: 3 timer

Ingen forhåndspreparerte hjelpemidler er tillatt på eksamen. Ingen bøker er tillatt untatt standard godkjent formelsamling. Kalkulator er tillatt.

Denne eksamen måler oppnådd forståelse hos studentene innen fire grunnleggende temaer i Faste stoffers fysikk, temaene er gjennomgått i forelesninger og regneøvelser i FYS3410 og er i samsvar med kursets pensum basert på utvalgte kapitler i Kittel's lærebok. Alle eksamensspørsmålene er organisert under de følgende overordnede temaer:

1. Krystallgitter og røtgendiffraksjon.
2. Punktdefekter og trykk.
3. Gittervibrasjoner og fononer.
4. Fri elektron Fermi gas

Hvert tema inneholder spørsmål av varierende vanskelighetsgrad og kompleksitet. Tilfredsstillende besvarelse av alle spørsmål innen et tema gir 25% av total poengsum.

FYS3410 1: Krystallgitter og røntgendiffraksjon.

1.1 Forklar hvordan Miller indekser er definert.

1.2 Betrakt planene A, B, C, D, E, F i gitteret vist i Fig.1. Miller indeksene for plan A er (001).

Finn Miller indeksene for plan B, C, D, E, F?

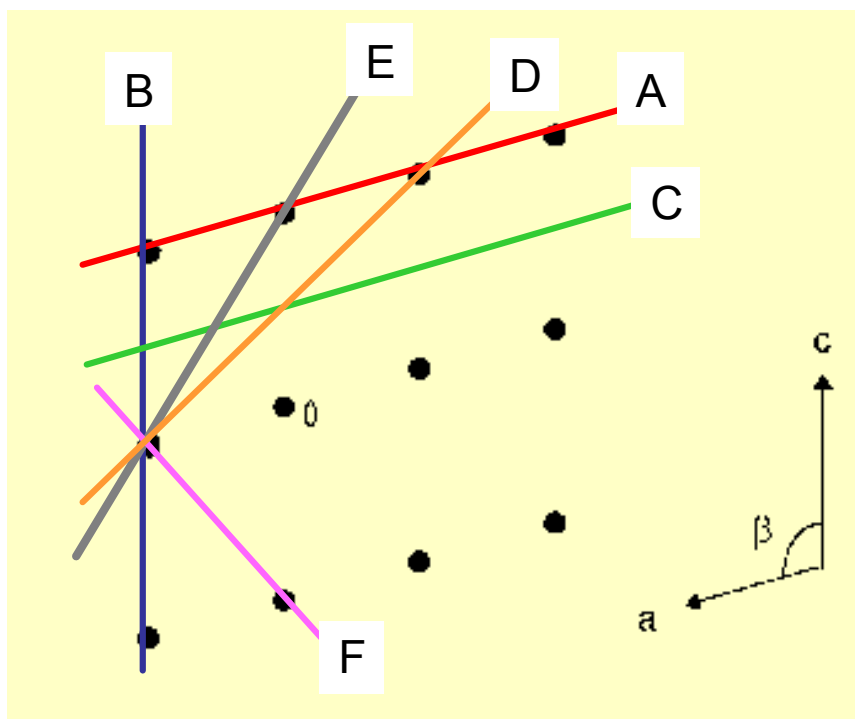


Fig.1. Tre dimensjonalt gitter med basis vektorer \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} og origo er merket med "0". Vektorene \vec{a} og \vec{c} har retning som vist på høyre side av figuren. Vektor \vec{b} er normal til papiplanet og rettet mot leseren.

1.3 Vis at diffraksjonsmaksima vi får fra en krystall korresponderer med resiproke gitterpunkter og svarer til hkl-familier av plan i det reelle rommet. Tips: (i) Benytt at den

resiproke gittervektoren kan skrives som $\vec{G} = \frac{2\pi}{d_{hkl}} \vec{n}_{hkl}$, der \vec{n}_{hkl} står normalt på hkl-planet og

d_{hkl} er avstanden mellom hkl-plan; (ii) anta Bragg diffraksjon av en innkommende bølge på et hkl-plan uttrykt ved endringen i bølgevektor ($\Delta\vec{k}$) og utled Laue betingelsen for diffraksjon; (iii) bruk Ewald konstruksjonen for klarifikasjoner.

FYS3410 2: Punktdefekter og trykk

2. Fig.2 illustrerer det faktum at det ved en gitt temperatur er energetisk gunstig å ha en konsentrasjon n_{eq} av vakanser i en krystall. Forklar (kort, gjerne i en setning) hvorfor entalpien/entropien øker/avtar med antallet vakanser i krystallen.

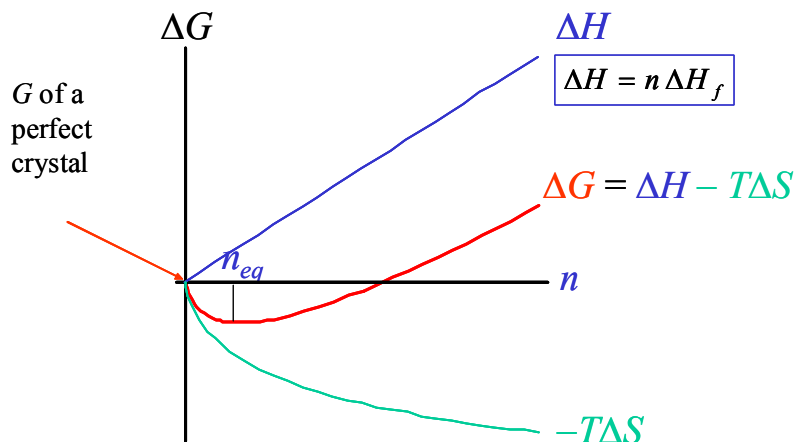


Fig.2. Illustrasjon av endringen i Gibbs fri energi (ΔG) med økende antall vakanser (n) i en krystall.

- 2.2. En introduksjon av n vakanser i en krystall med totalt N okkuperte gitterpunkter resulterer i en økning av antall ikke-skillbare mikrotilstander (W) i systemet, det kan vises at

$$W = \frac{N!}{(N-n)!n!}. \text{ Økningen i } W \text{ gir en økning i entropien til systemet } S = k_B \ln W, \text{ dvs}$$

konfigurasjonsentropien til systemet. Utled et uttrykk for konsentrasjonen av vakanser n_{eq} ved termisk likevekt ved å ta hensyn til endringer i entalpi og konfigurasjonsentropi ved introduksjon av vakanser i krystallen. Stirling's formel $\ln X! \approx X \ln X - X$ holder for store X , og kan forenkle entropiberegningen. Vi kan anta at antall vakanser er mye mindre enn antall atomer i gitteret, slik at $n \ll N$.

- 2.3. Entalpien for formasjon av vakanser er gitt ved $\Delta H_f = \Delta E_f + \sigma \Delta V_f$ der ΔE_f og ΔV_f er energien og volumet som kreves for å skape en vakans, mens σ er ytre trykk på krystallen.

Anta $\Delta E_f = 2 \text{ eV}$ og $\Delta V_f = 20 \text{ \AA}^3$ og regn ut vakanskonsentrasjonen i en slik krystall ved 300 og 800K ved atmosfærisk trykk (anta en tetthet av atomer på $5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$).

- 2.4. Vi fortsetter å studere samme krystall som i 2.3. Hvor høyt trykk må vi påtrykke krystallen (anta kun bidrag fra hydrostatisk trykk) ved 300K for å oppnå samme vakanskonsentrasjon som vi oppnådde ved 800K og atmosfærisk trykk? Hvilken type trykk måtte vi påtrykke, tensilt eller kompressivt?

Opgitt,

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$$

$$1 \text{ atm} = 101.325 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Boltzmann constant } k_B = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

FYS3410 Topic 3: Gittervibrasjoner og fononer

3.1 Anta et atom (med masse m) per primitive gittercelle. Dispersjonsrelasjonen er gitt ved

$$\omega^2 = \frac{4c}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

Skisser og analyser dispersjonsrelasjonen i første Brillouin sone(BZ).

3.2 Skisser og analyser gruppehastigheten korresponderende til gittervibrasjonen beskrevet i 3.1. Vis at gruppehastigheten går mot null på randen av Brillouin sone. Forklar fysikken bak dette.

3.3 Vis at tilstandstettheten av fononer $D(\omega)$ i en dimensjon er gitt ved $D_1(\omega) = \frac{L}{\pi} \frac{dk}{d\omega}$. Ta i betraktning at kvantiseringen av k kan utledes ved hjelp av grensebetingelser. (Tips: Finn først et uttrykk for tettheten av tilstander i k -rommet)

3.4 Forklar spesifikke egenskaper ved Einstein og Debye modellene for varmekapasitet i et gitter. Forklar de fysiske antakelsene som ligger bak de ulike modellene.

FYS3410 4: Fri Elektron Fermi gass (FEFG)

4.1 Elektroner i “fri elektron fermi gass modellen” er beskrevet ved ikke-vekselvirkende elektroner i uavhengige elektrontilstander, der tilstandene i stor grad er bestemt av grensebetingelser. Elektronene er modelert som fanget i en boks (uendelig dyp potensialbrønn) med sidelengde L , potensialet inne i boksen er lik 0. Vis at de tillatte energinivåene i en dimensjon er gitt ved

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2$$

4.2 Fermienergien er definert som energien til det øverste okkuperte energinivået i grunntilstanden til en N elektron fri Fermi gass. Hva er Fermienergien (ε_F) i en dimensjon? Husk Pauliprinsippet!

4.3 I tre dimensjoner er $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 \cdot N}{V} \right)^{2/3}$. Utled og skisser tilstandstettheten $D(\varepsilon)$ for den tre dimensjonale FEFG i grunntilstanden. Ved å ta hensyn til Fermi-Dirac fordelingen

$$f(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1}$$

gjør en modifikasjon i grafen din slik at den viser hvordan

tilstandstettheten endrer seg med (økende) temperatur.

4.4 Ved hjelp av plottet du gjorde i 4.3, forklar kvalitativt det faktum at varmekapasiteten til FEFG er mye lavere enn den er i en ideell enatomig gass. Tips: Ta hensyn til at kun elektroner i et intervall $k_B T$ rundt ε_F vil være eksitert ved temperatur T .