

Forelesning nr.3

IN 1080 Mekatronikk

Nettverkstopologier
Kirchhoffs strøm- og spenningslover
Parallele og serielle kretser



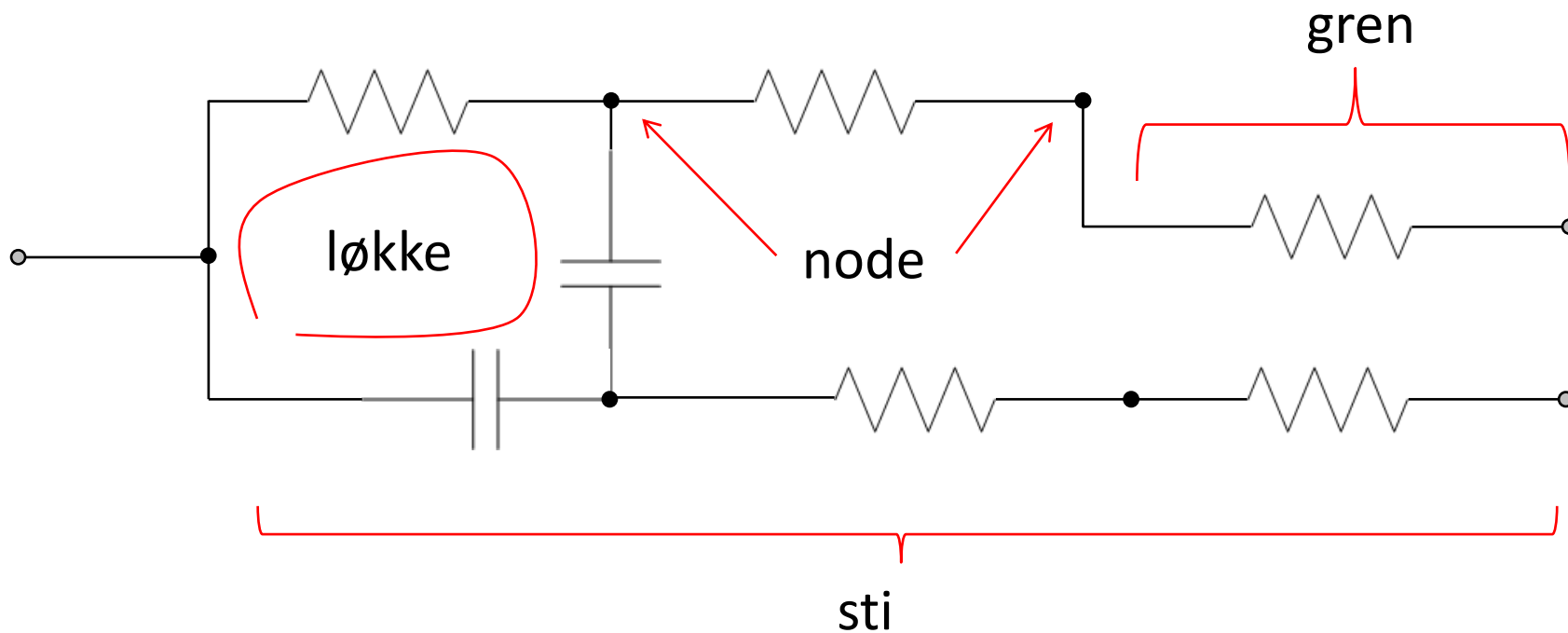
Nettverkstopologier

- . Man har sjelden kretser med bare én kilde og ett element
- . Når vi skal analysere eller designe større kretser trenger vi å vite **hvordan** de ulike delene er koblet sammen, dvs **topologien**:
 - . **Nettverk**: Samling av elementer koblet sammen (annet ord for krets eller delkrets)
 - . **Node**: Punkt hvor to eller flere elementer er koblet sammen (med null motstand)
 - . **Sti**: Vei mellom to noder gjennom et nettverk hvor en node besøkes kun én gang
 - . **Løkke**: Samme som *lukket sti*: Sti hvor start- og sluttnode er identisk
 - . **Gren**: Sti som består av ett enkelt element og nodene i hver ende
 - . **Lineært nettverk**: Krets som bare består av komponenter med lineær I-V karakteristikk

Nettverkstopologier (forts)

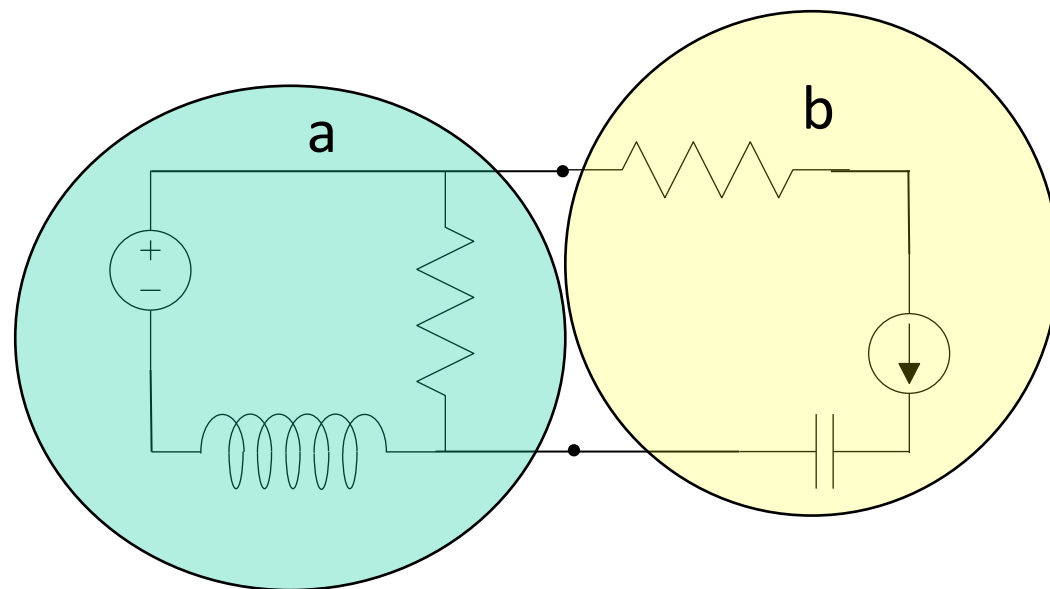
- Topologien til en lineær krets kan si noe om hvilke teknikker vi kan bruke for å analysere den:
 - **Kirchhoffs spenningslov** brukes for å finne spenninger over elementer i løkker
 - **Kirchhoffs strømlov** brukes for finne strømmer ut av eller inn i noder
 - **Branch current:** Finner uttrykk for strømmene i grener eller stier
 - **Mesh current:** Finner strømmene rundt løkker
 - **Nortons teorem** og **Thevenins teorem** brukes for å forenkle lineære nettverk
 - **Superposisjon:** Summering av bidrag fra enkelt-kilder i et nettverk
 - **Millmans teorem:** omforming av nettverk til en type som lettere lar seg analysere
- I IN1080 skal vi se nærmere på Kirchhoffs lover, Nortons og Thévenins teoremer
- Hvis kretsen består av ikke-lineære elementer (f.eks. transistorer eller dioder) kan teknikkene over bare benyttes på de delene som er lineære
- I praksis brukes man simuleringsverktøy, f.eks LTSpice for å analysere større kretser

Eksempel på krets/nettverk



Spørsmål

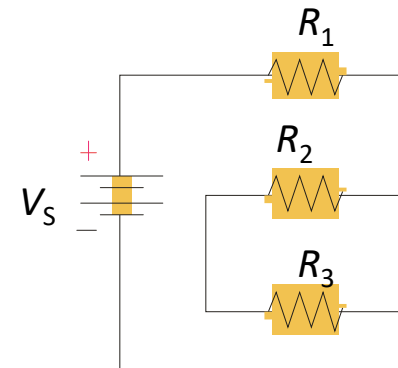
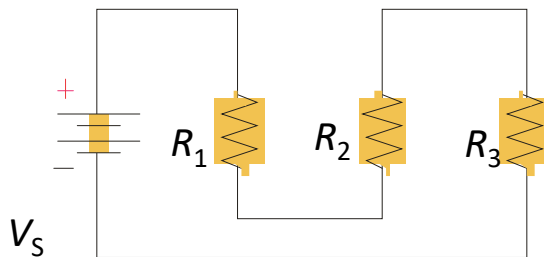
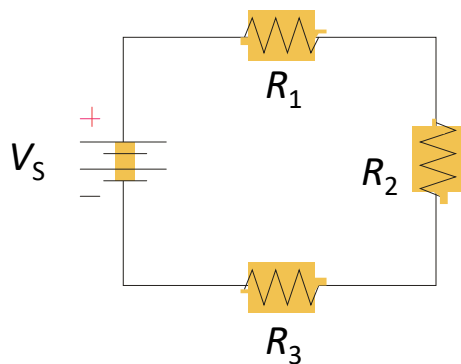
. Gitt kretsen over til høyre:



- . **Spm 1:** Hva kan denne kretsen også kalles?
- . **Spm 2:** Hvor mange noder har den?
- . **Spm 3:** Hvor mange elementer har den totalt?
- . **Spm 4:** Hvor mange hhv aktive og passive elementer har den?
- . **Spm 5:** Hva kalles topologien til delen som ligger innenfor sirkelen til venstre (del **a**)?
- . **Spm 6:** Hva kalles topologien til delen som ligger innenfor sirkelen til høyre (del **b**)?
- . **Spm 7:** Hvor mange løkker har kretsen totalt?
- . **Spm 8:** Hva kalles tilkoblingspunktene mellom **a** og **b**?
- . **Spm 9:** Er kretsen lineær eller ikke-lineær?

Serielle kretser

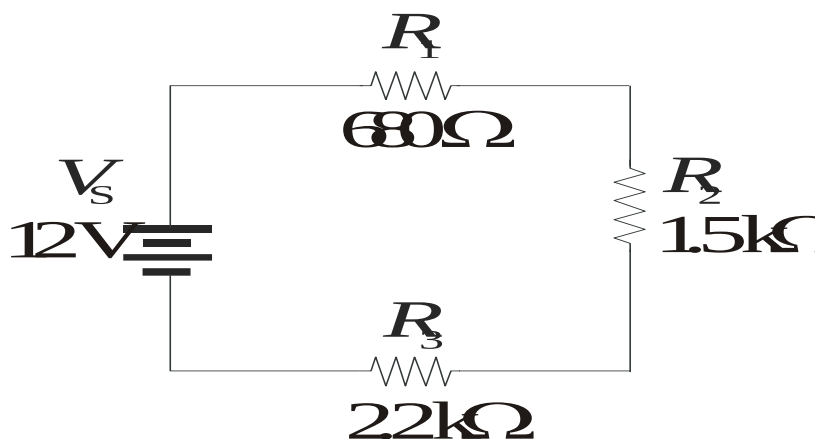
- En seriell krets har
 - minst én kilde og/eller ett element **og**
 - én felles løkke som strømmen går igjennom (samme strøm går gjennom alle kilder og elementer)



- Spørsmål
 - Spm 1:** Hvor mange aktive og passive elementer har kretsene over?
 - Spm 2:** Hvor mange noder har kretsene?
 - Spm 3:** Hva er den funksjonelle forskjellen mellom dem?
 - Spm 4:** Hva er sammenhengen mellom strømmene som går gjennom R_1 , R_2 , R_3 og kilden V_S ?
 - Spm 5:** Hvis vi ønsker å måle strømmen som går i kretsen: hvor må vi gjøre dette?

Total resistans i serielle kretser

- Den totale resistansen i en seriell krets er lik summen av resistansen til enkeltelementene



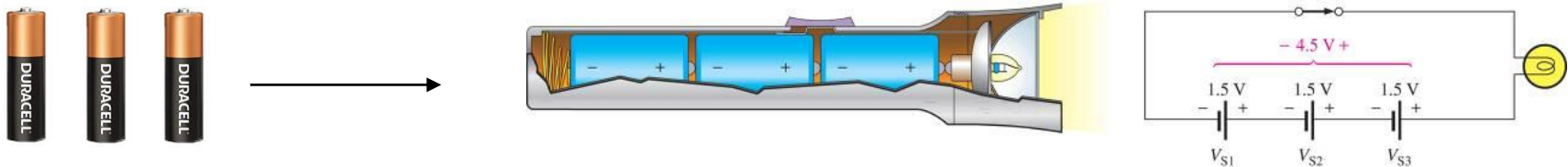
$$R_{\text{tot}} = 0.68 \text{ k}\Omega + 1.5 \text{ k}\Omega + 2.2 \text{ k}\Omega = 4.38 \text{ k}\Omega$$

R_1 , R_2 og R_3 kan erstattes av en resistor R_{tot}

- Den totale resistansen for N resistanser i serie er $R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

Kirchhoffs spenningslov (KVL)

- En krets kan bestå av mer enn én kilde av samme type
 - F.eks har batteridrevne kretser har ofte flere batterier koblet i serie,
 - Lommelykt med 1,5 v enkeltbatterier, eks AA- eller AAA-størrelse



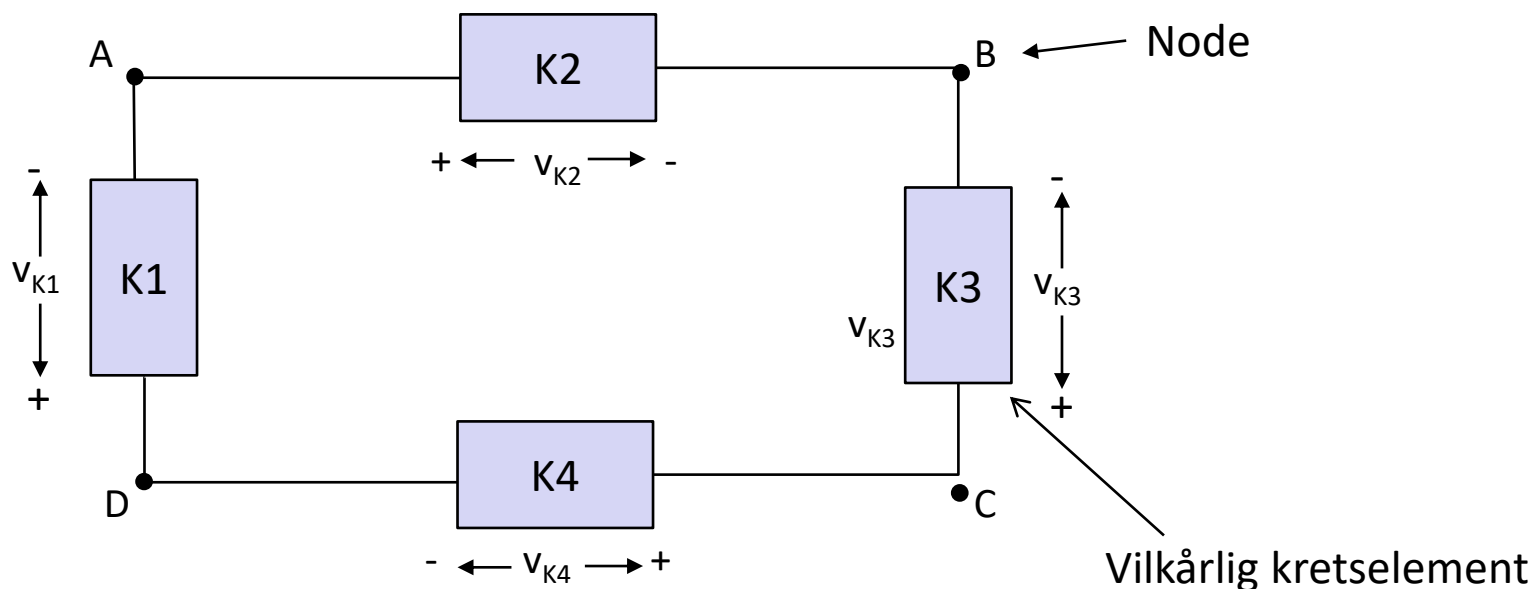
- Elbilbatterier, f.eks Li-Ion med 3,6 v enkeltceller



- Kirchhoffs spenningslov** kan brukes for å finne den totale spenningen

Kirchhoffs spenningslov (forts)

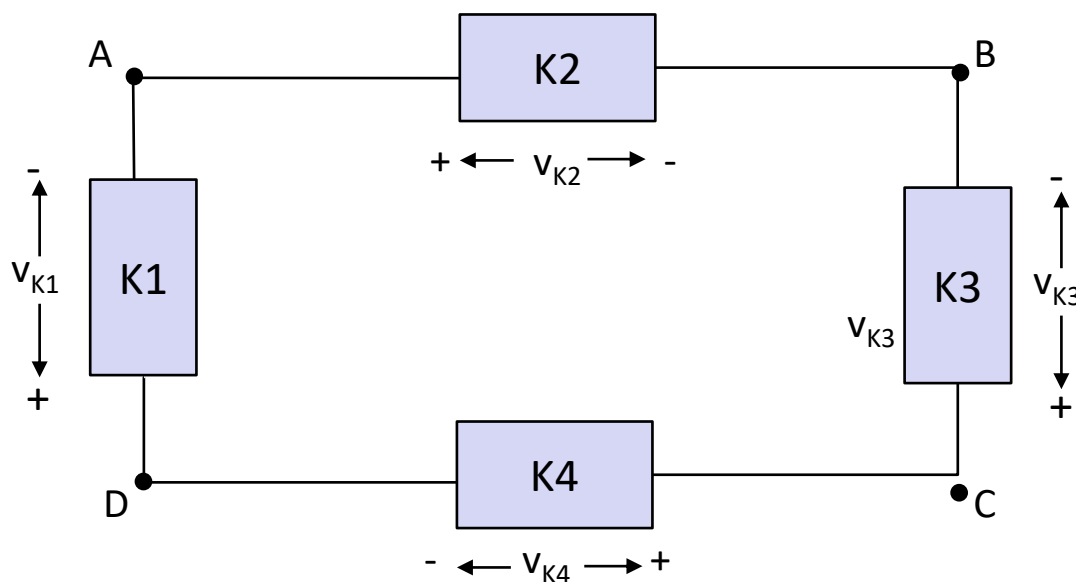
- KVL: "Den algebraiske summen av spenningene rundt en lukket sti er 0"



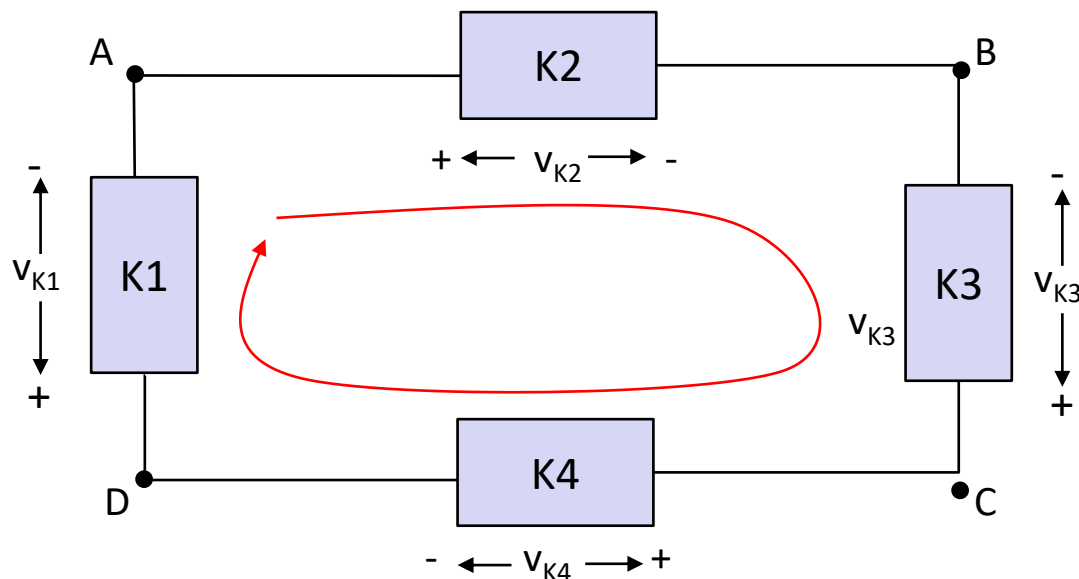
- Energien som kreves for å flytte en ladning mellom to noder er uavhengig av hvilken vei som velges gjennom kretsen

Kirchhoffs spenningslov (forts)

- Velger en retning (med eller mot klokka) gjennom løkken:
 - Hvis man treffer på «+» på et element først, settes spenningen som positiv
 - Hvis man treffer på «-» på et element først, settes spenningen som negativ



Kirchhoffs spenningslov (forts)

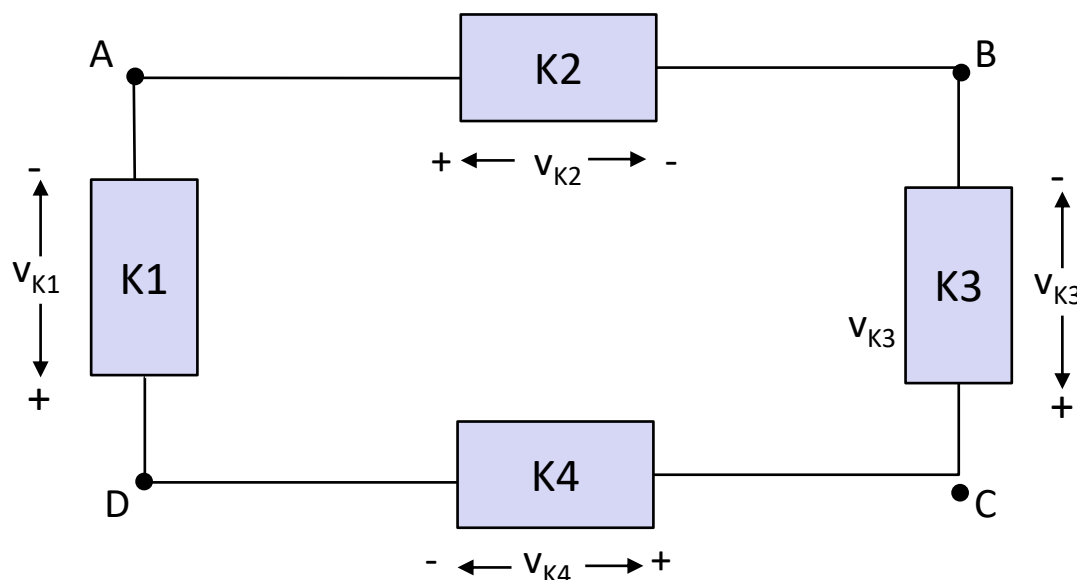


- Starter i node A og går med klokken:

$$v_{K2} + (-v_{K3}) + v_{K4} + v_{K1} = 0 \Rightarrow v_{K3} = v_{K1} + v_{K2} + v_{K4}$$

Kirchhoffs spenningslov (forts)

- Samme energi kreves for å flytte en ladning fra $A \rightarrow B \rightarrow C$, som fra $A \rightarrow D \rightarrow C$



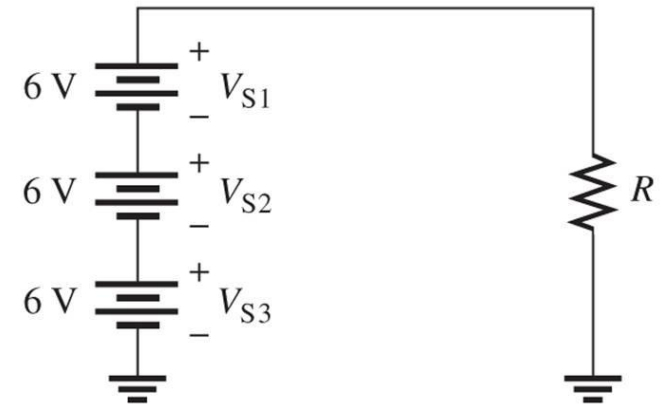
$$V_{ABC} = V_{K2} - V_{K3} \quad \wedge \quad V_{ADC} = -V_{K1} - V_{K4} \Rightarrow$$

$$V_{ABC} = V_{ADC} \Rightarrow V_{K2} - V_{K3} = -V_{K1} - V_{K4} \Rightarrow$$

$$-V_{K3} + V_{K1} + V_{K2} + V_{K4} = 0$$

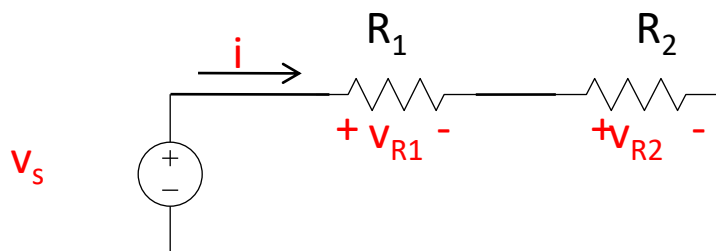
Spenningsøkning og -deling

- Ved å koble spenningskilder i serie kan man øke spenningen
- Andre ganger ønsker man å *redusere* spenningen med en bestemt faktor uten å endre spenningskilden
- Dette kan gjøre med en *spenningsdeler*



Spenningsdeling (forts.)

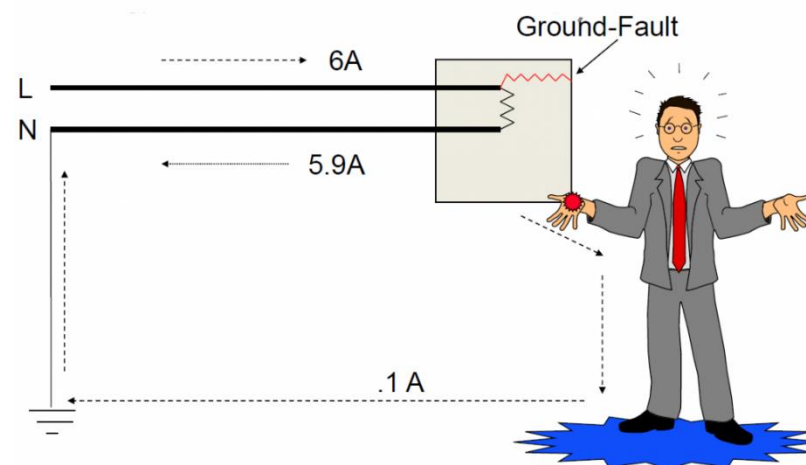
- Ønsker å finne et uttrykk for spenningene V_{R1} og V_{R2} som funksjon av V_s , R_1 og R_2 (og ikke av strømmen i)



$$V_s = V_{R1} + V_{R2} = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2) \Rightarrow$$

$$i = \frac{V_s}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_{R2} = iR_2 = \left(\frac{V_s}{R_1 + R_2} \right) R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$$

$$i = \frac{V_s}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_{R1} = iR_1 = \left(\frac{V_s}{R_1 + R_2} \right) R_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

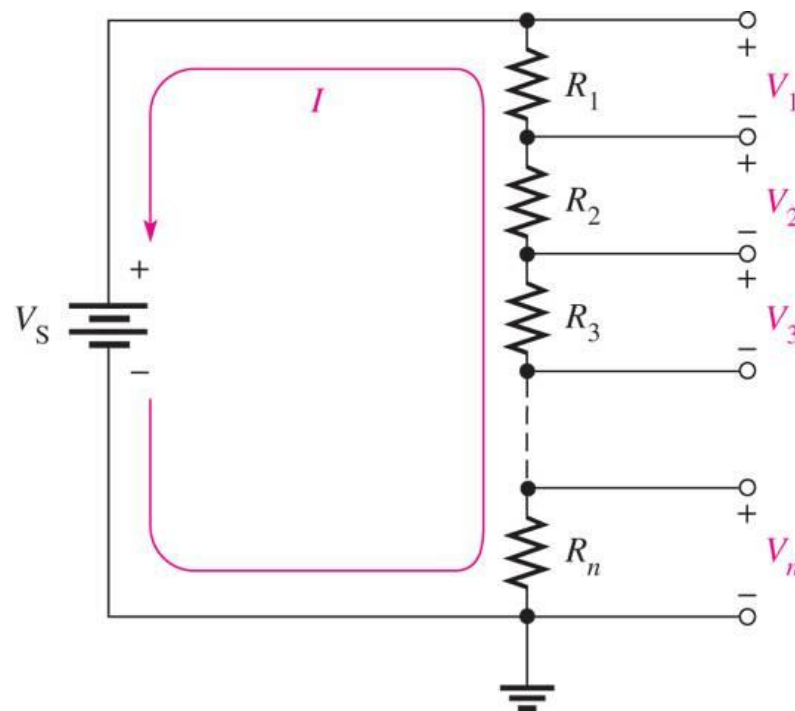


- Motstanden med høyest impedansverdi har størst spenningsfall!

Spenningsdeling (forts.)

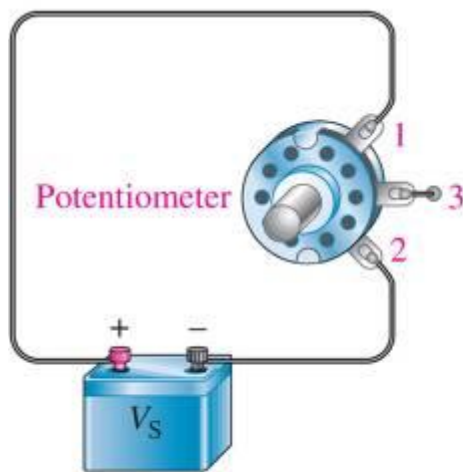
- Gitt en krets med n motstander, total resistans $R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ og spenning V_S
- Da er spenningsfallet over motstand R_x gitt av formelen

$$V_x = \left(\frac{R_x}{R_T} \right) V_S$$

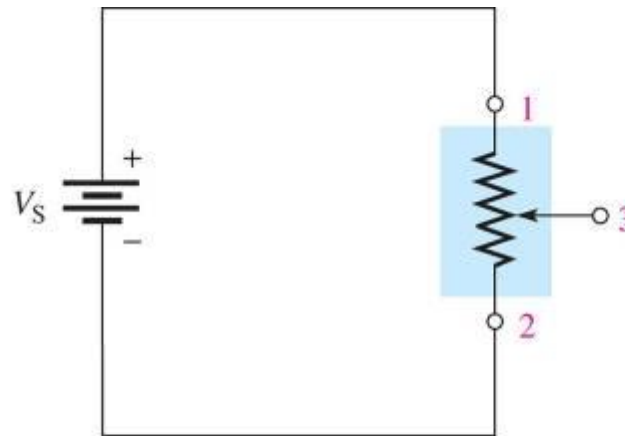


Variabel spenningsdeling

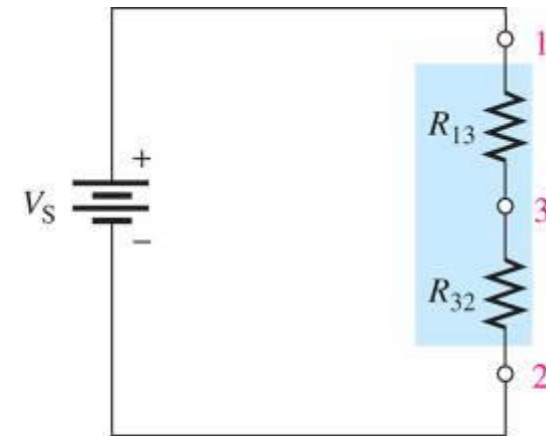
- Et *potentiometer* varierer spenningsdelingen mekanisk:



(a) Pictorial



(b) Schematic

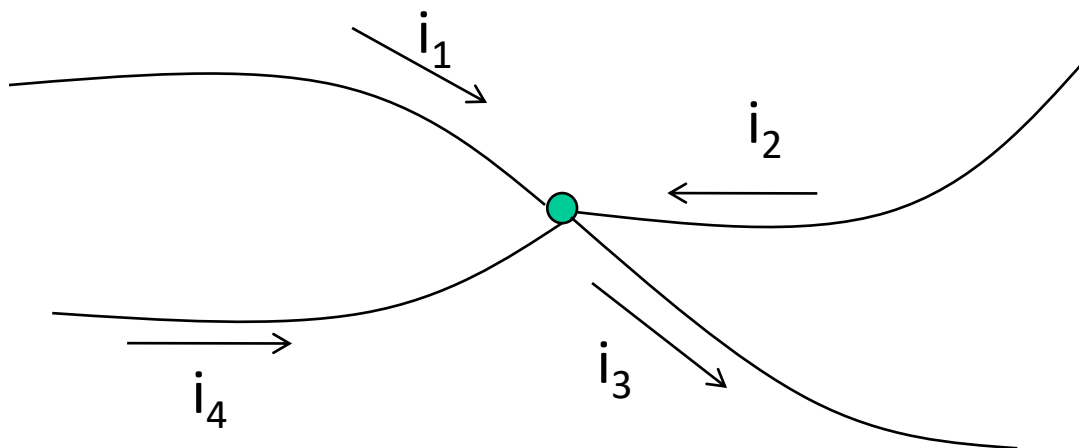


(c) Equivalent schematic

- Sett fra V_S er den *totale* resistansen $R_T = R_{13} + R_{32}$ konstant, mens *forholdet* mellom R_{13} og R_{32} varierer

Kirchhoffs strømlov (KCL)

- Den algebraiske summen av alle strømmene som går inn mot (eller ut av) en node er lik 0
 - Spørsmål:** Gi en intuitiv begrunnelse for at dette må være riktig



$$i_1 + i_2 + (-i_3) + i_4 = 0$$

$$(-i_1) + (-i_2) + i_3 + (-i_4) = 0$$

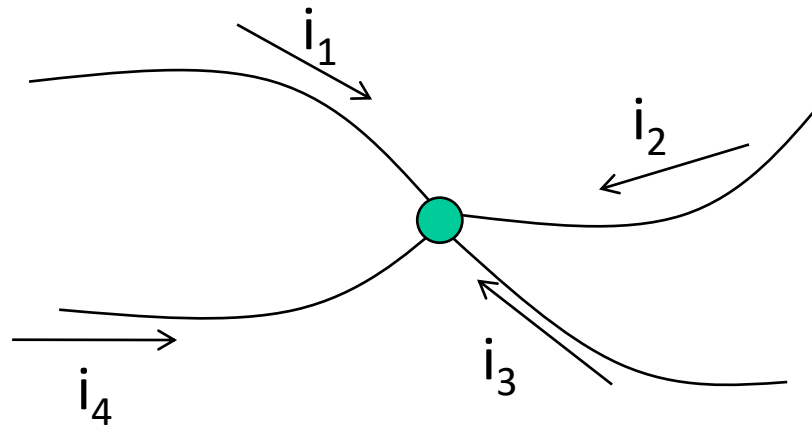
Kirchhoffs strømlov (KCL) forts.

- Det generelle tilfellet er gitt av

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0$$

- Det må defineres en referanseretning på strømmene:
 - .Enten
 1. Strømmer inn er positive og strømmer ut negative
 - .Eller
 2. Strømmer inn er negative og strømmer ut positive

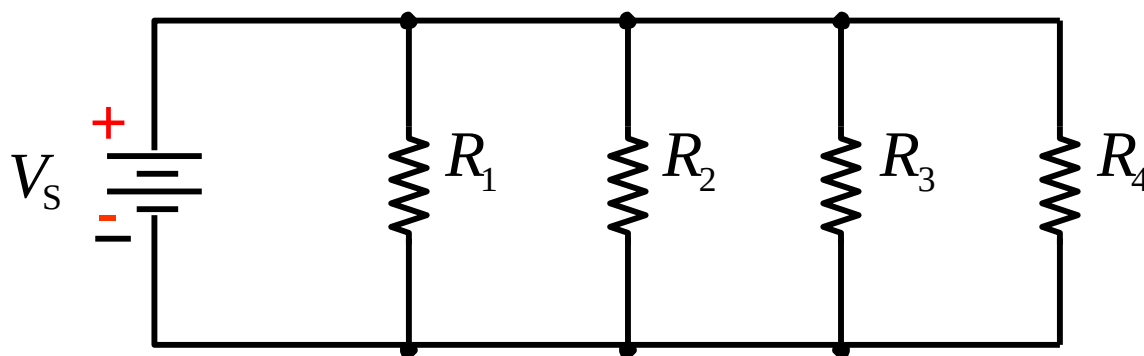
Oppgave



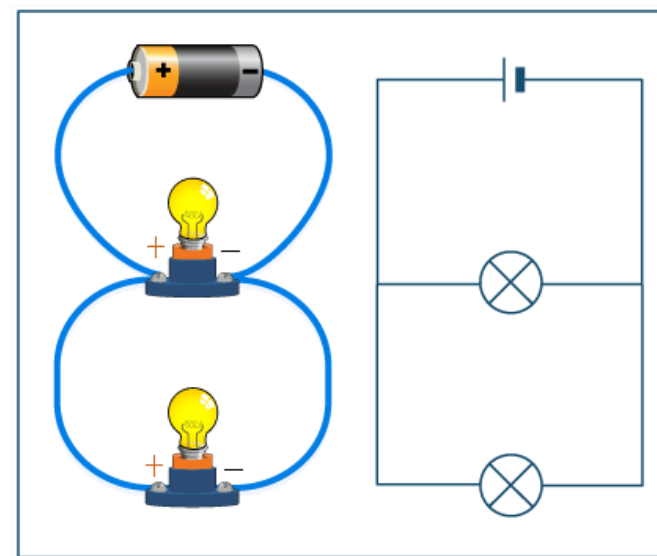
- **Spm 1:** Finn verdien til i_1 når $i_2 = 2A$, $i_3 = -3A$ og $i_4 = 0,5A$
- **Spm 2:** Anta nå at strømretningene på bildet er korrekte: Hvilke verdier har i_1 , i_2 , i_3 og i_4 i dette tilfellet?

Parallellkrets

- En *parallellkrets* har mer enn én strømvei mellom terminalene på en spenningskilde

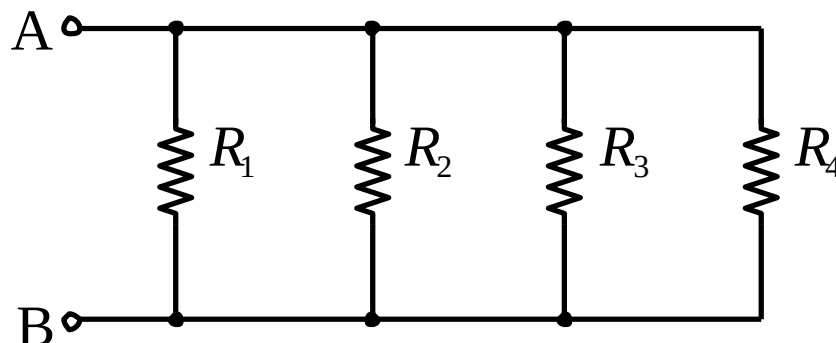


- Strømmene gjennom hvert element kan være ulike, men alle elementene har samme spenning over seg



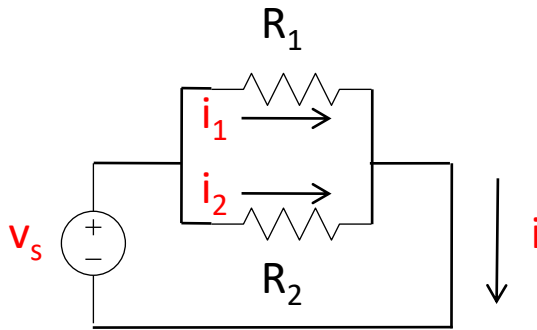
Resistorer i parallell

- Resistorer er koblet i *parallell* hvis endepunktene er koblet sammen i det samme nodeparet



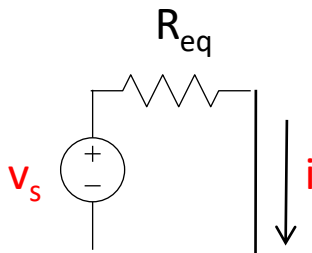
- En krets kan ha resistorer som *lokalt sett* er parallelle (eventuelt serielle), og del av en større krets som verken er parallell eller seriell

Ekvivalent parallellmotstand – 2 resistorer



$$i = i_1 + i_2 \wedge i_1 = \frac{v_s}{R_1} \wedge i_2 = \frac{v_s}{R_2}$$

$$i = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} = v_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

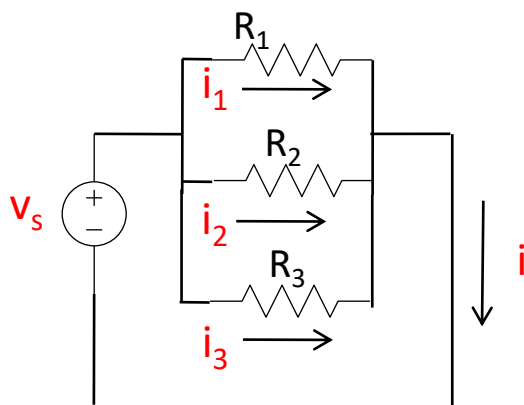


$$i = \frac{v_s}{R_{eq}} = v_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

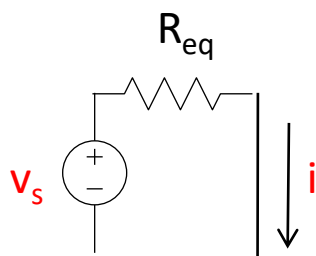
Ekvivalent parallellmotstand – 3 resistorer

- Benytter samme teknikken som for 2 parallelle resistorer:



$$i = i_1 + i_2 + i_3 \wedge i_1 = \frac{V_s}{R_1} \wedge i_2 = \frac{V_s}{R_2} \wedge i_3 = \frac{V_s}{R_3}$$

$$i = \frac{V_s}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} + \frac{V_s}{R_3} = V_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



$$i = \frac{V_s}{R_{eq}} = V_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Samlet resistans i en parallellkrets

- Den samlede *resistansen* R_T i en parallellkrets med n resistorer er lik summen av den *inverse* av resistansen til hvert enkelt element

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

- Konduktansen til en parallellkrets er lik summen av konduktansen til enkeltelementene:

$$G_T = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

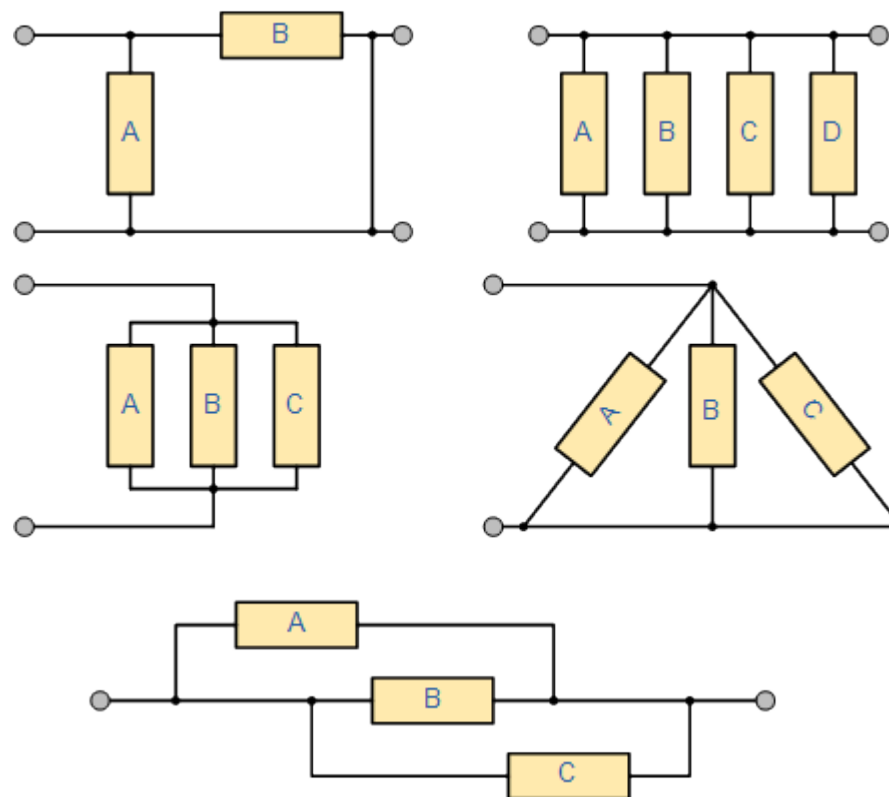
Samlet resistans i en parallellkrets (forts)

- Hvis alle n resistorer har samme Ohm-verdi R blir den totale resistansen i en parallellkobling

$$R_T = \frac{R}{n}$$

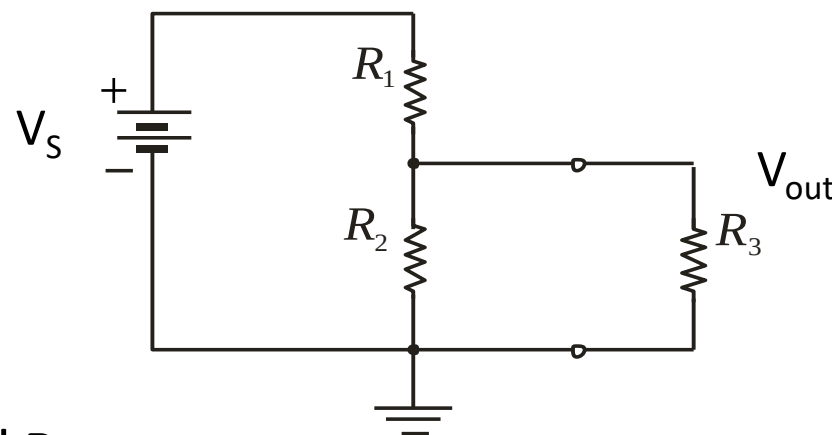
- Notasjonen for resistorer i parallell er

$$R_n || R_m$$



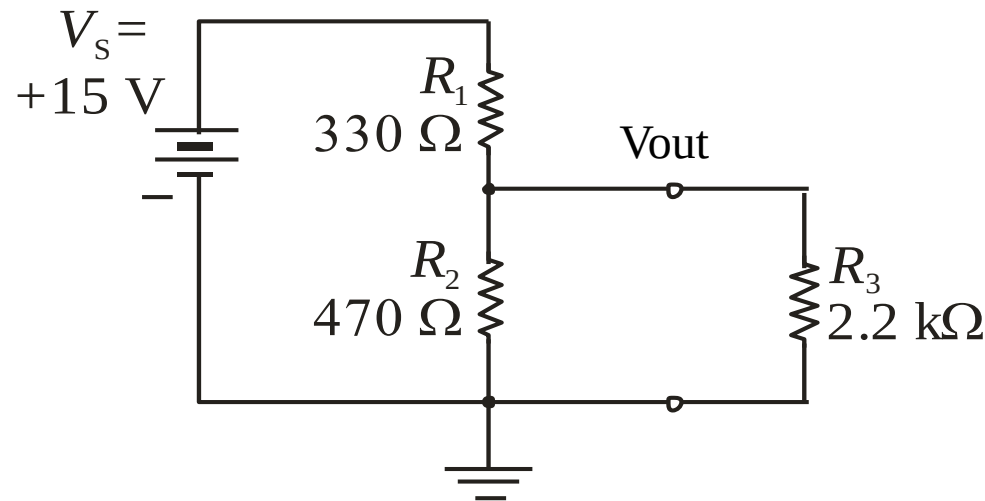
Spenningsdeler med lastmotstand

- Hvis en spenningsdeler brukes som forsyningsspenning til f.eks en resistor, vil spenningen synke



- Spenningen V_{out} er nå $V_{out} = \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} V_S$
- Siden $R_2 || R_3 < R_2$, så synker V_{out}

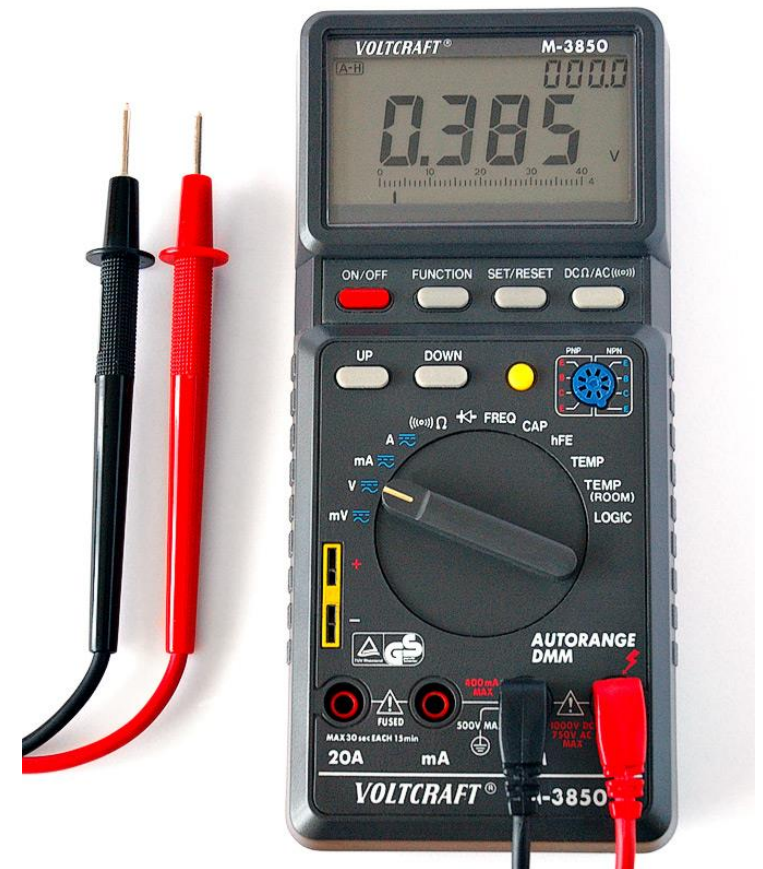
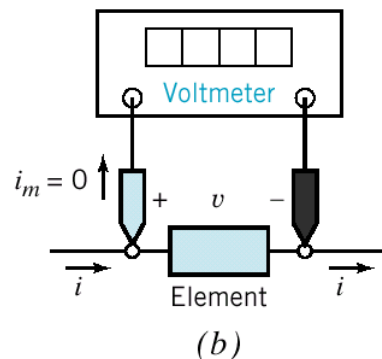
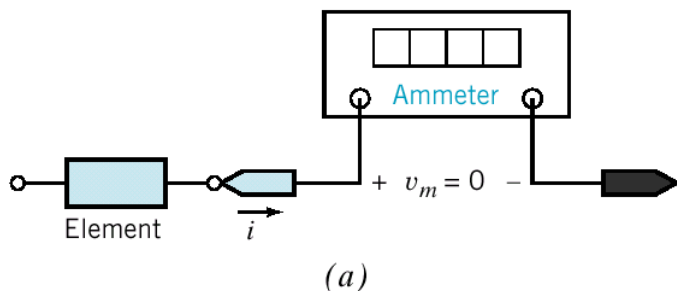
Spørsmål



- **Spm 1:** Hva er spenningen V_{out} hvis R_3 ikke er med? $V_{out} = R_2 / (R_1 + R_2) * V_s \approx 8,8\text{v}$
- **Spm 2:** Hva skjer med V_{out} når R_3 er koblet inn? $V_{out} = (R_2 || R_3) / (R_1 + R_2 || R_3) * V_s \approx 8,1\text{v}$

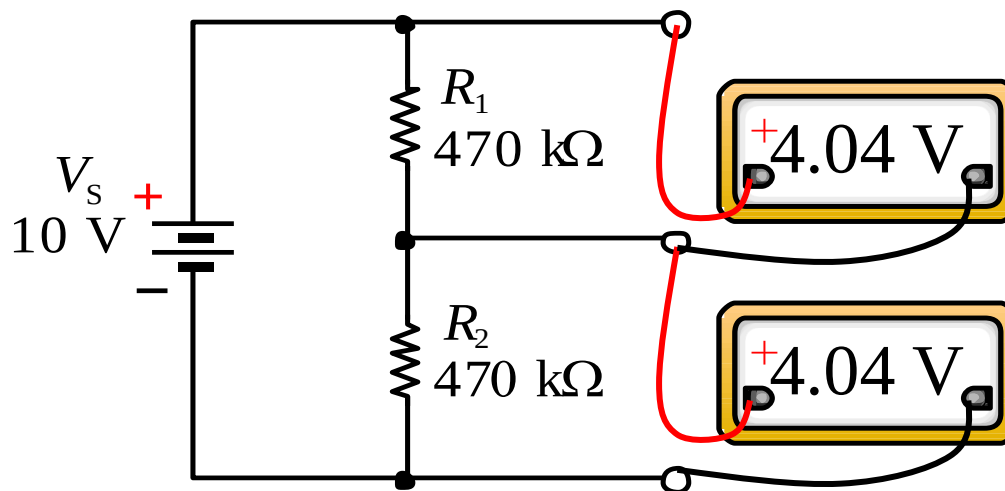
Måling av spenning, strøm og resistans

- Strøm, spenning og motstand kan måles med et *multimeter*
- Vi måler spenningen *over* og strømmen *gjennom* et element
- **NB:** Viktig at instrumentet **IKKE** påvirker måleresultatet.



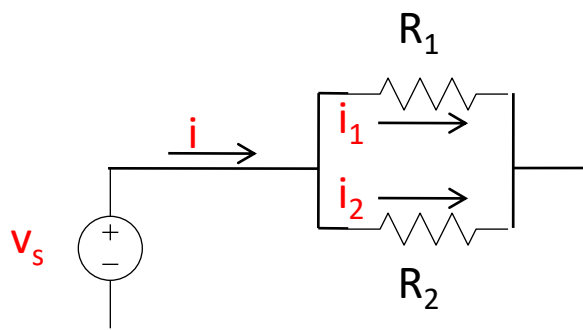
Påvirkning av spenningmåling

- Et voltmeter som kobles i parallell med elementet som det skal måles spenning over, vil innføre en parallellmotstand
- **Spm 1:** Hva er den (teoretiske) spenningen i noden mellom R_1 og R_2 uten voltmeter (målt til jord)?
- **Spm 2:** Hvordan forklarer du målingen som vises?
- **Spm 3:** Hva skjer hvis det brukes *to* voltmetre som måler spenningen over R_1 og R_2 samtidig?



Strømdeling

- Noen ganger trenger man å dele en strøm på en konstant faktor

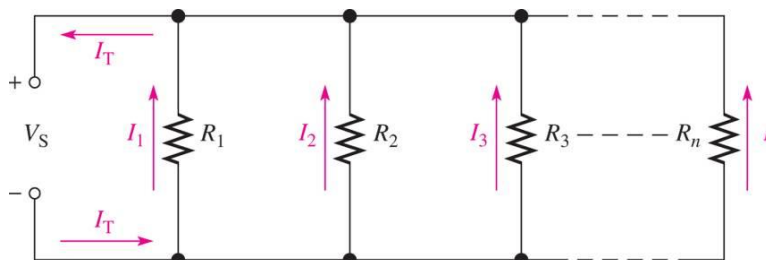


$$i_1 = \frac{v_s}{R_1} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_1} \Rightarrow i_1 = i \frac{R_1 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{v_s}{R_2} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_2} \Rightarrow i_2 = i \frac{R_1 R_2}{R_2(R_1 + R_2)} = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Strømdeling (forts)

- Uttrykket for strømdeling kan generaliseres til å gjelde n parallellkoblede grener



- Strømmen I_x gjennom én gren er gitt av

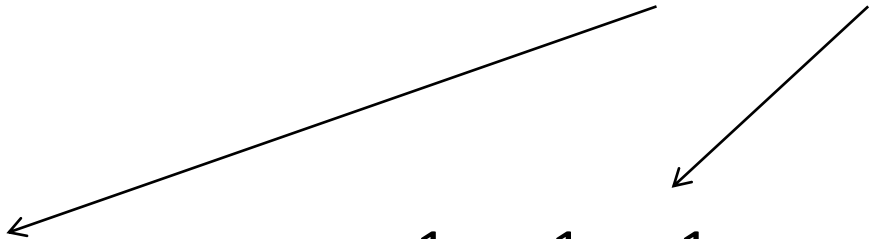
$$V_S = I_x R_x \Rightarrow I_x = \frac{V_S}{R_x}$$

- Samtidig er V_S gitt av den totale strømmen I_T ganget med den totale resistansen R_T

$$I_x = \frac{V_S}{R_x} = \frac{I_T R_T}{R_x} = \left(\frac{R_T}{R_x} \right) I_T$$

Seriell-parallellkretser

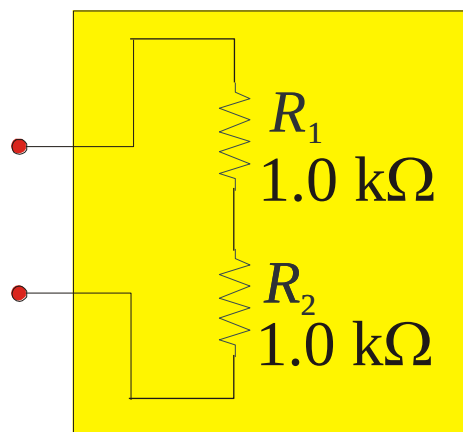
- De fleste kretser er en blanding av serie- og parallell-koblede elementer
- Man ønsker nesten alltid å bruke færrest mulig komponenter
- For å forenkle må man identifisere hvilke elementer som er i serie og i parallell, og benytte formlene for resistorer i hhv serie og parallell


$$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

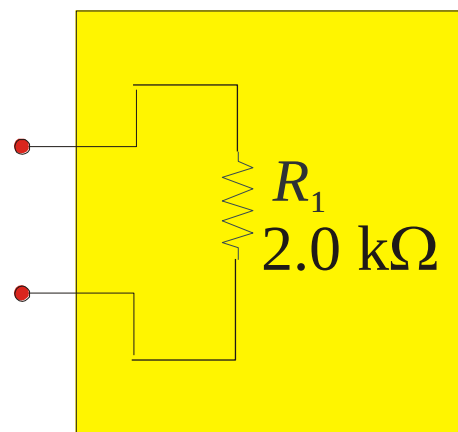
$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Seriell-parallellkretser (forts)

- Kretser kalles *ekvivalente* hvis de har de samme elektriske egenskapene mellom et nodepar
- Sett fra «utsiden» har krets A og B de samme elektriske egenskapene (i dette tilfellet samme resistans)

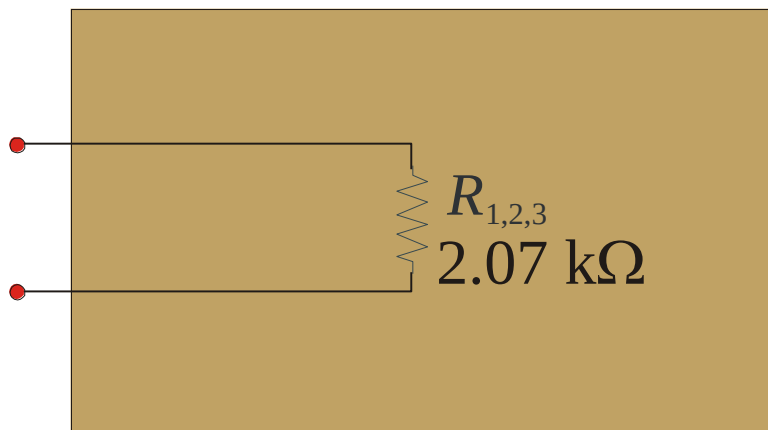
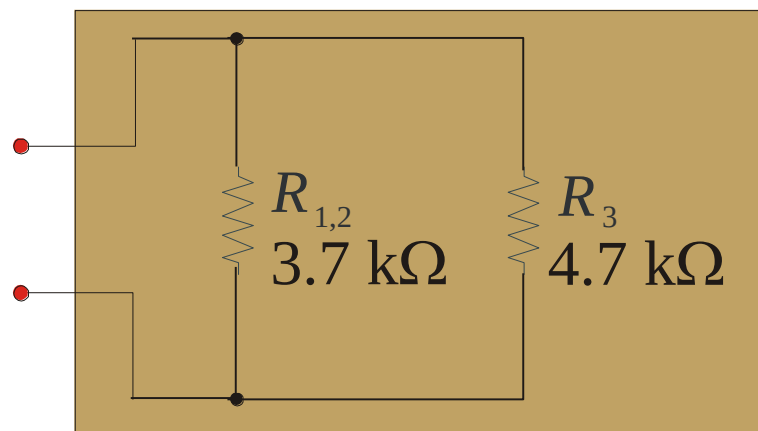
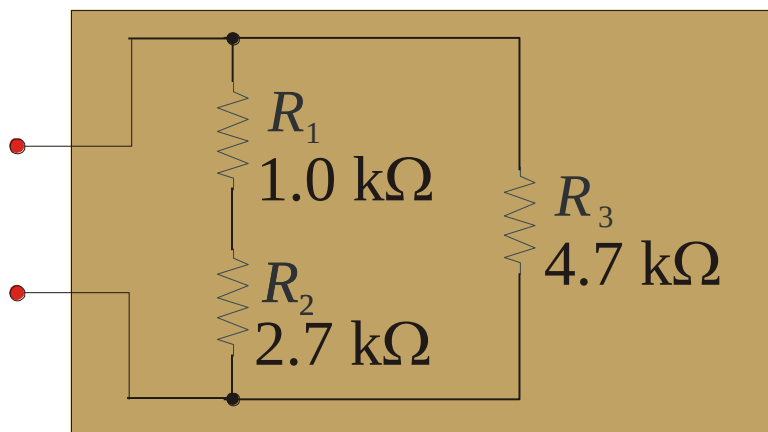


A



B

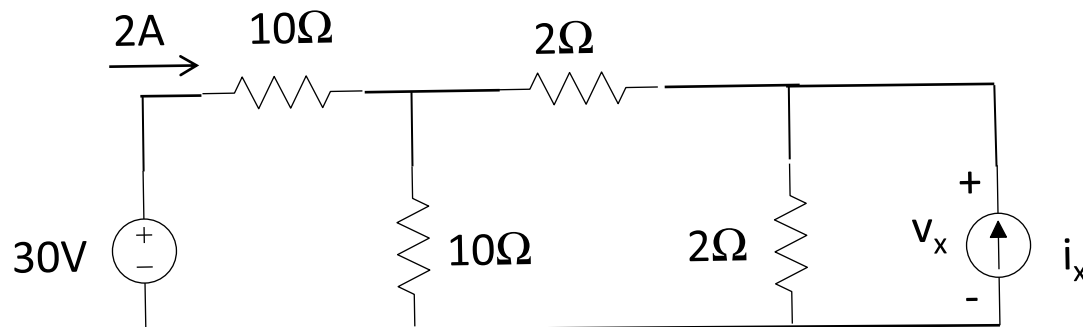
Seriell-parallellkretser (forts)



- Målt mellom de røde terminalene er det ikke mulig å avgjøre hva som er forskjellen mellom disse kretsene

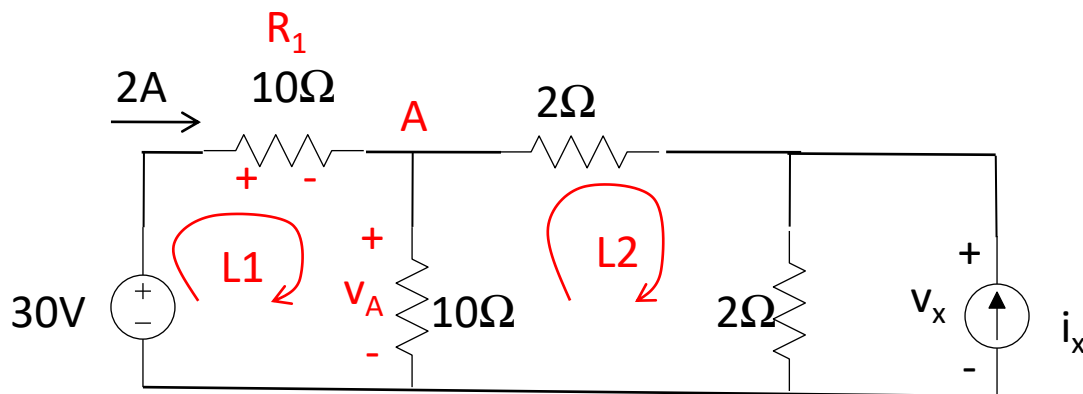
Eksempel: Kretsanalyse

- Finn spenningen v_x i kretsen under



- Forberedelse: Sett navn på relevante noder, løkker, strømmer, spenninger og elementer (iterativ prosess)

Eksempel (forts)



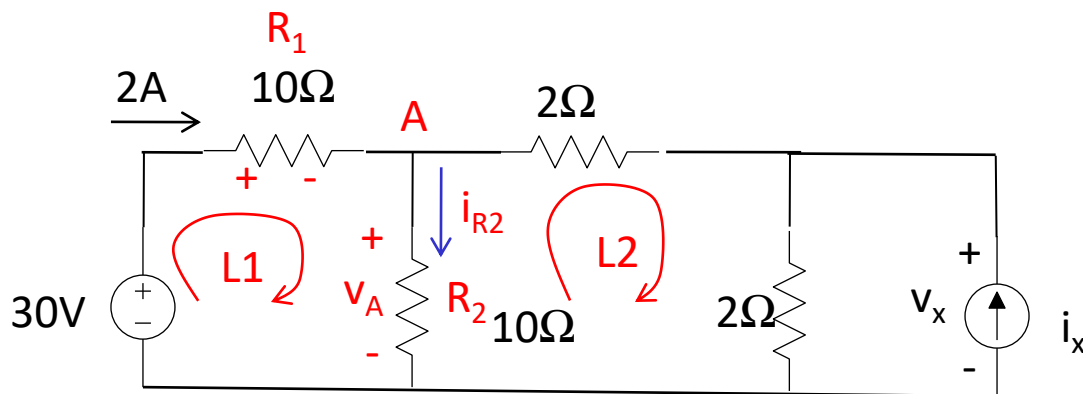
- *Steg 1:* Finn v_A ved å bruke KVL på løkke L1:

$$-30v + v_{R1} + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$-30v + 10\Omega \times 2A + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$v_A = 10v$$

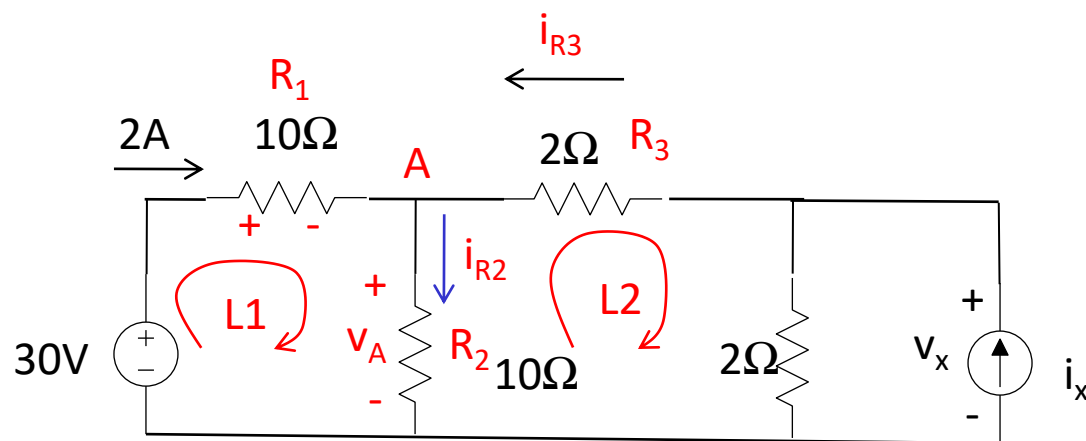
Eksempel (forts)



- Steg 3: Finn i_{R2} ved å bruke Ohms lov:

$$i_{R2} = \frac{10V}{10\Omega} = 1A$$

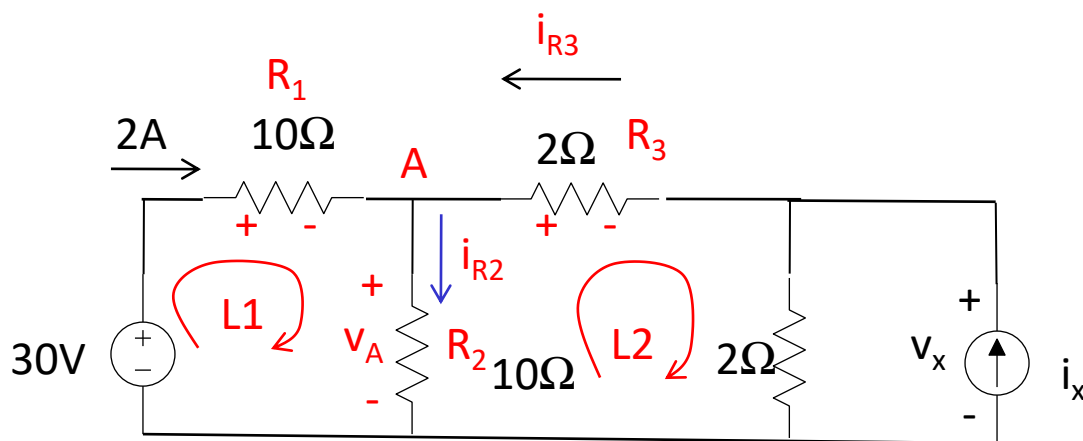
Eksempel (forts)



- *Steg 4:* Bruk KCL mot node A

$$2A + i_{R3} = i_{R2} \Rightarrow i_{R3} = 1A - 2A = -1A$$

Eksempel (forts)



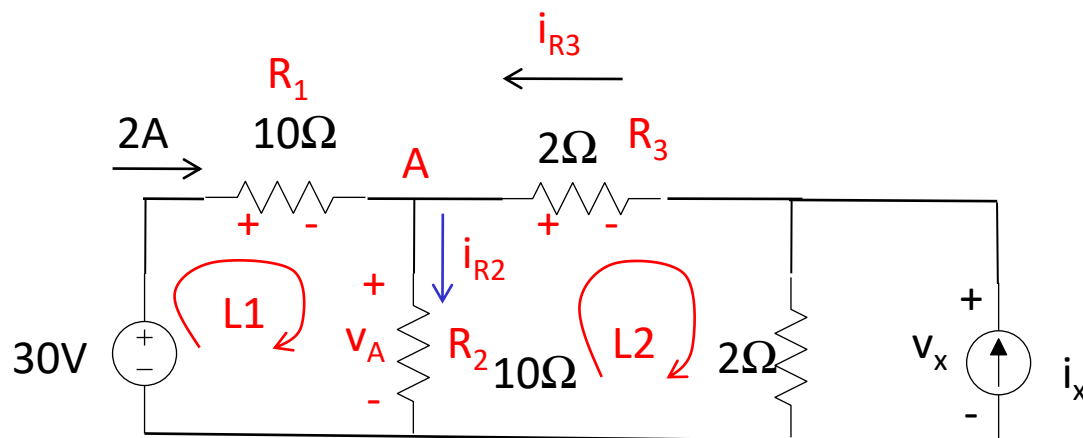
- *Steg 5:* Bruk KVL på løkke L2

$$-v_A + v_{R3} + v_x = 0$$

- Bruker Ohms lov for å finne v_{R3} som da gir

$$-10v + 2\Omega \times 1A + v_x = 0 \Rightarrow v_x = 8v$$

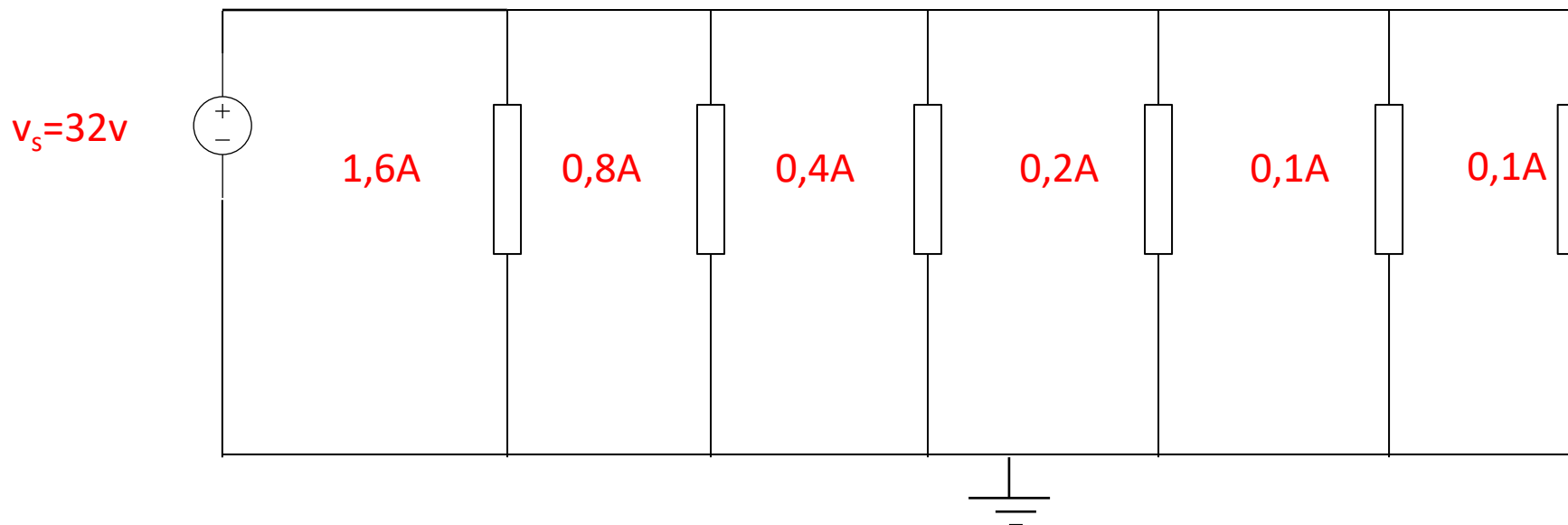
Eksempel (forts)



- Vi fant den ukjente spenningen ved bruk av KVL, KCL og Ohms lov
- Node og mesh-analyse (Nortons/Thévenins teoremer og superposisjon) er mer systematiske metoder
- For større kretser brukes simuleringsprogrammer, f.eks. SPICE

Nøtt til neste gang

- Gitt en krets som skal brukes til å lage 6 strømmmer slik det er vist:



- Hvis du bare har én motstandsstørrelse tilgjengelig, hvor stor må denne være for at du skal klare deg med *så få* motstander som mulig?

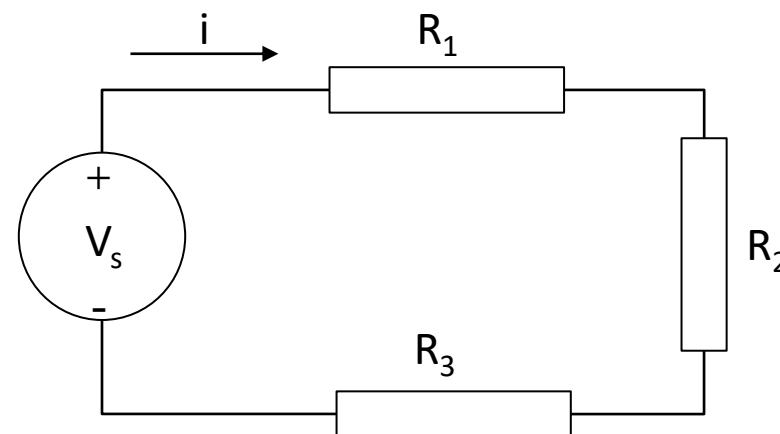
Strøm, spenning og resistans i seriell krets

- Oppgave:** Gitt figuren til venstre

Spm 1: Anta $R_1 = 10 \text{ Ohm}$, $R_2 = 20 \text{ Ohm}$, $V_s = 6\text{v}$ og $i = 0,05 \text{ A}$.
Hva er R_3 ?

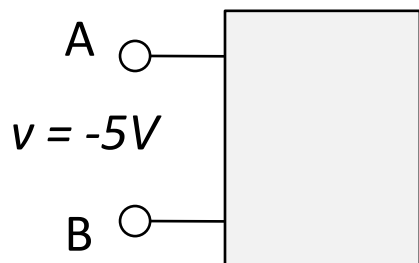
Spm 2: Anta $R_1 = 10 \text{ Ohm}$, $R_2 = 20 \text{ Ohm}$, $R_3 = 150 \text{ Ohm}$ og
 $i = 0,02 \text{ A}$. Hva er V_s ?

Spm 3: Anta Anta $R_1 = 15 \text{ Ohm}$, $R_2 = 25 \text{ Ohm}$, $V_s = 1,2\text{v}$ og
 $i = 0,03 \text{ A}$. Hva er R_3 ?

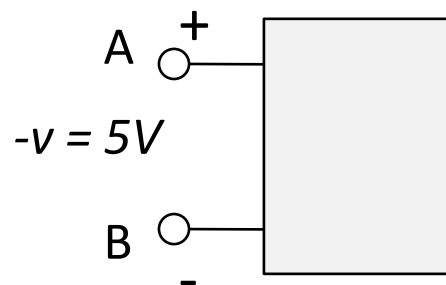


Oppgave

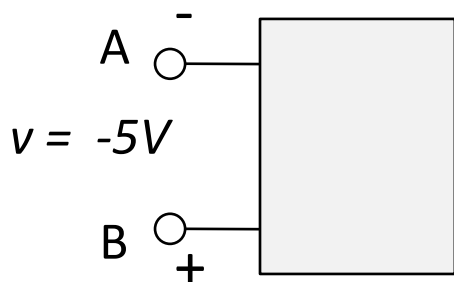
- Er A positiv eller negativ i forhold til B?



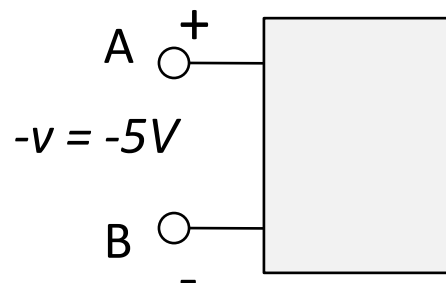
Tilfelle 1)



Tilfelle 2)



Tilfelle 3)



Tilfelle 4)

Oppgave

- **Spm 1:** Gitt kretsen med følgende verdier: $V_s=6\text{v}$, $R_1= 100\text{k}\Omega$ og $R_2=200\text{ k}\Omega$. Hva er spenningen V_x ?

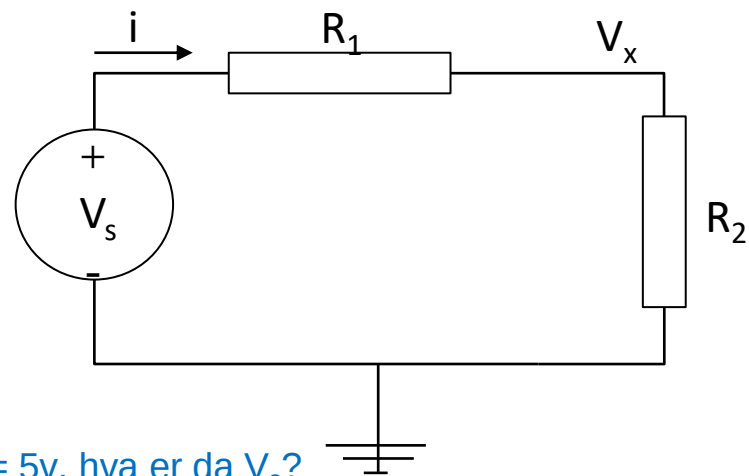
- **Spm 2:** Hva er spenningsfallet over R_1 og R_2 ?

- **Spm 3:** Hvor stor er strømmen gjennom R_1 ?

- **Spm 4:** Anta samme verdier for R_1 og R_2 som i spm 1. Hvis vi måler $V_x = 5\text{v}$, hva er da V_s ?

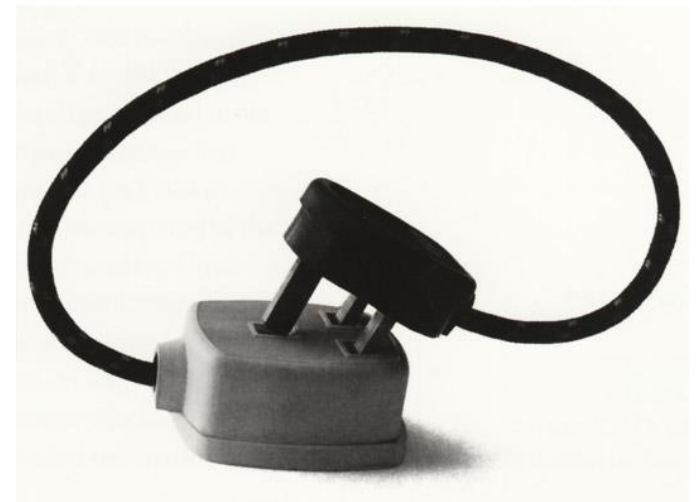
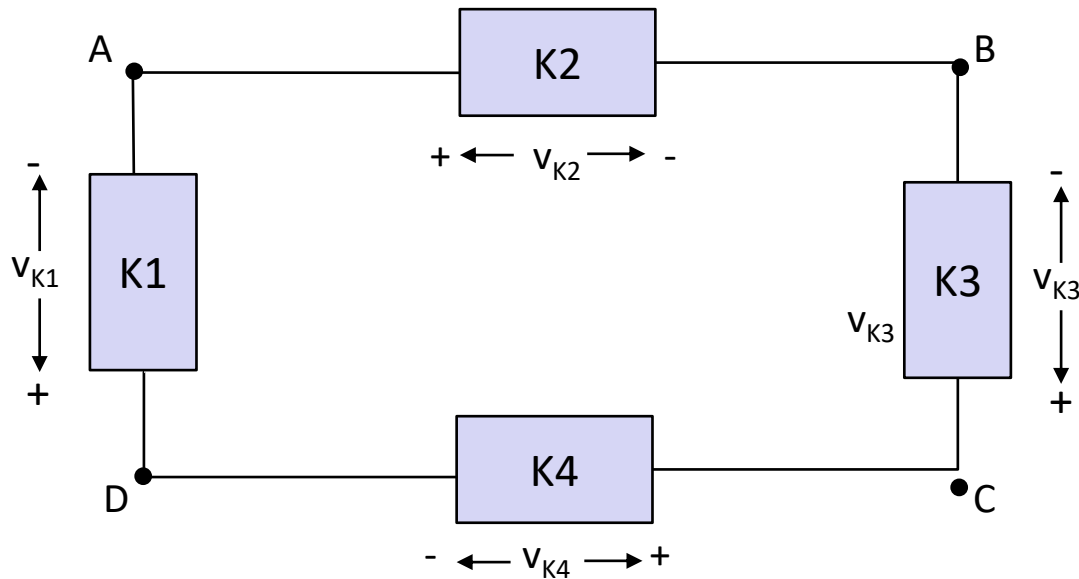
- **Spm 5:** Hvordan må vi velge R_1 og R_2 hvis strømmen skal være $0,1\text{A}$, $V_s=12\text{v}$ og $V_x= 0,25 \cdot V_s$?

- **Spm 6:** Hvis strømmen ikke skal overstige $0,1\text{A}$, må R_1 og R_2 velges større eller mindre? (V_x forutsettes konstant)



Oppgave

- Spm 1:** Finn V_{K3} når $V_{K1} = 2\text{v}$, $V_{K2} = 5\text{v}$ og $V_{K4} = -4\text{v}$



- Spm 2:** Hva skjer hvis $V_{K3} = 12\text{v}$, $V_{K1} = -2\text{v}$, $V_{K2} = -4\text{v}$ og $V_{K4} = 0\text{v}$?
Forklar hva som skjer rent fysisk.

Oppgave

- Fra eksamen INF 1411 våren 2015
 - Spm 1: Hvor mange noder har kretsen?
 - Spm 2: Hva er den totale resistansen hvis $R=22\text{k}\Omega$?

