

Analyse av lineære kretser (versjon 0)

C Lingjærde og OC Lingjærde

May 20, 2022

Innledning

En elektronisk krets kan være satt sammen av mange forskjellige typer komponenter: motstander, kondensatorer, induktorer, dioder, transistorer, operasjonsforsterkere (opamp'er), osv. Kretsanalyse handler om å finne strøm og spenninger på ulike punkter i en krets. Noen ganger er vi bare ute etter spenning eller strøm ett bestemt sted i kretsen, og andre ganger ønsker vi en full oversikt over strøm og spenninger alle steder i kretsen. Uansett koker kretsanalyse gjerne ned til at man må løse en likning eller (ofte) et system av likninger. I dette kapitlet kommer disse likningene alltid til å være lineære og de er lette å løse for hånd. Generelt kan kretsanalyse involvere løsning av systemer av ulineære differensiallikninger og kan kreve bruk av numeriske metoder.

Strøm og spenning

Vi oppsummerer kort noen viktige egenskaper til strøm og spenning som vi kommer til å gjøre bruk av i fortsettelsen.

Strøm er noe vi måler i et bestemt punkt i en krets, og det sier hvor stor ladningsforflytning vi har i punktet. **Spenning** måles mellom to punkter i en krets og forteller hvor ivrig ladningene er til å flytte seg fra det ene punktet til det andre.

Med strøm mener vi altså hvor mye ladning (hvor mange elektroner) som faktisk forflytter seg per tidsenhet, mens vi med spenning mener hvor stor kraft som virker på ladningene for å få dem til å flytte på seg. Hvis spenningen mellom to punkter A og B er lik 0 virker det ingen kraft på ladningene og da går det heller ingen strøm mellom A og B (dvs strømmen er 0). Hvis spenningen mellom A og B er forskjellig fra 0 virker det en kraft på ladningene, og da vil strømmen også være forskjellig fra 0 (hvis det er mulig for ladninger å vandre mellom A og B). Ikke bare det: generelt vil det være slik at hvis vi dobler spenningen så dobles også strømmen (hvis det er en lineær krets). Med et 4.5 V batteri som spenningskilde går det nøyaktig tre ganger så mye strøm mellom A og B som med et 1.5 V batteri. Mer generelt er $I = V/R$ hvor I er strøm, V er spenning og R er resistans. Dette kaller vi Ohms lov.

Jord

Det er tungvint alltid å snakke om spenningen *mellom to punkter*. Kan vi klare å definere spenningen i ett punkt A? Heldigvis finnes det en enkel måte å gjøre dette på. Vi starter med å definere et fast referansepunkt i kretsen og tegne dette inn i kretsdiagrammet. Deretter blir vi enige om at alle spenninger skal måles relativt til dette punktet. Da kan vi snakke om spenningen i et punkt A og det vi da egentlig mener, er spenningen mellom A og det faste referansepunktet. Dette er så viktig at vi uthever det som en boks:

Jord er et fast referansepunkt i en krets som vi selv velger. Når vi har fastlagt hvor jord ligger, kan vi snakke om spenningen i et hvilket som helst punkt i kretsen. Da er det underforstått at vi mener spenningen *mellom* dette punktet og jordpunktet.

Måler vi spenning i forhold til jord så vil spenningen i jordpunktet selv være *OV*. Andre kretspunkter kan ha spenning som er lavere (f.eks. $-3V$), høyere (f.eks. $4V$), eller lik den som er i jordpunktet.

To typer av kretser

Når vi skal analysere en krets, må vi først ta stilling til om det er en lineær krets eller en ulineær krets. Lineære kretser er enklest å analysere, mens ulineære kretser kan være veldig kompliserte å analysere.

Lineære kretser får vi når vi bare inkluderer lineære komponenter. Eksempler på lineære komponenter er resistorer (motstander), kondensatorer, induktorer (spoler), spenningskilder og strømkilder.

Hvis vi har med andre typer komponenter, for eksempel dioder, transistorer og op-amps, så blir kretsen ulineær. Men selv da er det ofte slik at deler av kretsen er lineær, og da kan vi analysere disse delene med lineære metoder. Et eksempel på dette er når vi ser på op-amps. Selve op-amp'en er en ulineær komponent, men kretsen rundt den kan være lineær og kan derfor analyseres med lineære metoder.

Nodeanalyse

Nodeanalyse er en metode for å finne strømmer og spenninger i en krets. Med den kan du lett løse mange kretsanalyseproblemer.

1) Velg jord

Velg et punkt i kretsen som nullreferanse (jord) for spenninger, hvis det ikke allerede er gjort. Jord kan legges vilkårlig, f.eks. ved negativ pol på en spenningskilde.

2) Navngi alle noder

Identifiser alle noder. Navngi dem som A,B,C,... og tilhørende spenninger som $V_A, V_B, \dots$. Nodene er forbindelsene *mellom* komponentene i kretsen. Hvis en forbindelse har forgreninger, er hele forgreningen en del av noden. Du trenger *ikke* å gi navn til noder med kjent spenning.

3) Navngi alle strømmer

Navngi alle strømmer i kretsen som $i_1, i_2, i_3, \dots$. Tegn inn som piler (retningen er vilkårlig). En node som forbinder to komponenter, har én enkelt strøm. En node med forgreninger har én strøm for hver forgrening.

4) Bruk KCL

For hver navngitt node med en forgrening bruker vi nå Kirchhoffs strømlov (KCL) til å sette opp sammenheng mellom strømmer inn og ut fra forgreningen. Eksempel: $i_3 = i_1 + i_2$.

5) Bruk Ohms lov

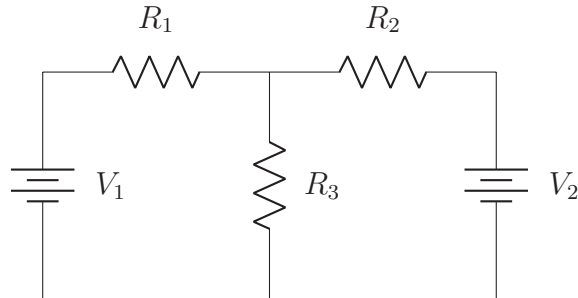
For hver strøm setter vi opp en likning, typisk ved å bruke Ohms lov på nærmeste motstand. Hvis i_i er strømmen gjennom en motstand R så setter vi $i_1 = (V_A - V_B)/R$ hvis strømpilen går fra node A til node B. Hvis en strøm kommer direkte fra en strømkilde, setter vi verdien like denne.

6) Løs likningene

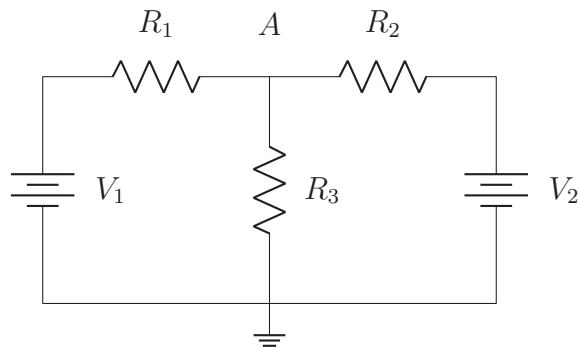
Bruk likningene over til å lage likninger hvor de eneste ukjente er $V_A, V_B, V_C, \dots$. Løs disse. Bruk verdiene du finner til å beregne $i_1, i_2, \dots$

Eksempel

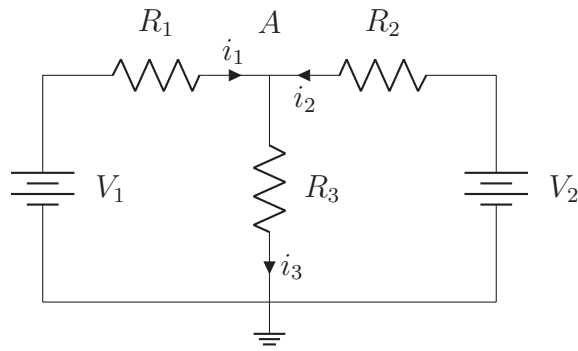
For å illustrere hvordan nodeanalyse fungerer i praksis, ser vi på følgende krets hvor $V_1 = 6V$, $V_2 = 3V$ og $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$:



Trinn 1+2: Vi velger først en nullreferanse (jord) og tegner denne inn i kretsen. Vi finner deretter alle noder. I dette eksemplet er det ialt fire noder: (1) Jord (inneholder en forgrening); (2) Mellom V_1 og R_1 (ingen forgrening); (3) Mellom R_2 og V_2 ; (4) Mellom R_1 , R_2 og R_3 (inneholder en forgrening). Spenningen til de tre første nodene er kjent (de er henholdsvis 0, $6V$ og $3V$). Disse gir vi derfor ikke eget navn. Den siste noden har ukjent spenning og vi kaller noden A og spenningen V_A :



Trinn 3: Vi navngir strømmene i node A og tegner dem inn som piler:



Trinn 4: Vi bruker KCL til å sette opp sammenhengen mellom strømmene:

$$i_3 = i_1 + i_2$$

Trinn 5: Vi bruker Ohms lov til å finne uttrykk for strømmene:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_1 - V_A}{R_1} = \frac{6 - V_A}{10} \\ i_2 &= \frac{V_2 - V_A}{R_2} = \frac{3 - V_A}{10} \\ i_3 &= \frac{V_A - 0}{R_3} = \frac{V_A}{10} \end{aligned}$$

Trinn 6: Legg merke til at V_A er den eneste ukjente størrelsen i de tre uttrykkene vi nettopp fant med Ohms lov. Vi plugger disse uttrykkene inn i KCL-likningen i trinn 4 og får:

$$\frac{V_A}{10} = \frac{6 - V_A}{10} + \frac{3 - V_A}{10} = \frac{9 - 2V_A}{10}$$

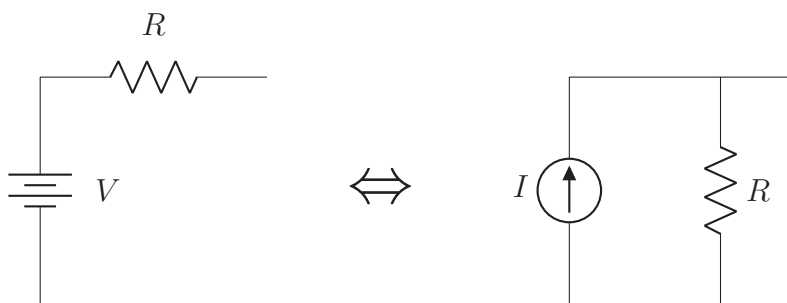
Dermed er $V_A = 3$. Vi setter denne verdien inn i høyresidene i trinn 5:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{6 - V_A}{10} = \frac{6 - 3}{10} = \frac{3}{10} \\ i_2 &= \frac{3 - V_A}{10} = \frac{3 - 3}{10} = 0 \\ i_3 &= \frac{V_A}{10} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Legg merke til at det ikke går noen strøm mellom den høyre spenningskilden V_B og noden A .

Bytte mellom spenningskilde og strømkilde

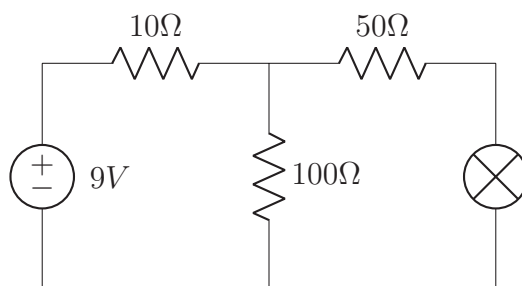
En (ideell) spenningskilde er en komponent som garanterer en bestemt spenning mellom utgangene, mens en (ideell) strømkilde er en komponent som garanterer leveranse av en bestemt strøm. I en krets kan vi ofte erstatte en spenningskilde med en strømkilde, eller omvendt, som vist i figuren under:



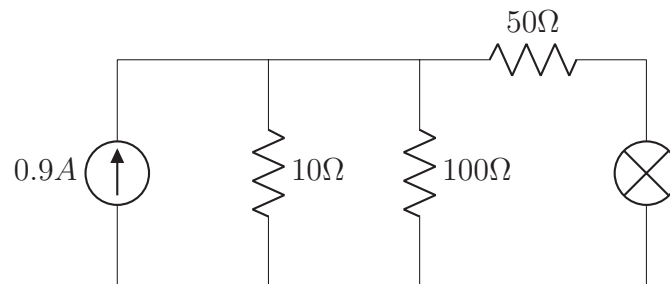
De to kretsene ovenfor er *ekvivalente* hvis vi sørger for at $V/I = R$. Med det så mener vi at de har nøyaktig de samme elektriske egenskapene sett fra utgangene på kretsen. Legg merke til motstanden R i de to kretsene. Denne er viktig! Hvis vi skal oppnå ekvivalens, kan vi *ikke* bare erstatte selve spenningskildesymbolet med et strømkildesymbol. Spenningskilden må være seriekoplet med en motstand, og strømkilden må være parallellkoplet med samme motstand.

En spenningskilde V i serie med en motstand R er ekvivalent med en strømkilde I i parallell med samme motstand R hvis $V/I = R$.

Eksempel: Anta at vi har følgende krets med en spenningskilde, tre motstander og en lampe:



Siden spenningskilden er seriekoplet med motstanden på 10Ω kan vi erstatte med en strømkilde i parallell med en motstand på 10Ω :



Legg merke til at strømstyrken I til strømkilden må oppfylle $V/I = R$, altså $I = V/R = 9V/10\Omega = 0.9A$.

Superposisjon

Hvis en krets inneholder flere energikilder (f.eks. en spenningskilde **og** en strømkilde) kan det forenkle kretsanalysen å se på hver energikilde for seg. Det kan vi få til ved å bruke prinsippet for superposisjon. Ordet *superposisjon* betyr å legge flere ting oppå hverandre, og det er nettopp det vi skal gjøre nå. Vi regner ut strømmer og spenninger i kretsen for hver energikilde separat, og så legger vi resultatene oppå hverandre til slutt (dvs summerer dem sammen).

Superposisjon er en teknikk som kan forenkle kretsanalysen når det er flere energikilder til stede. Energikildene består av alle spenningskilder og strømkilder.

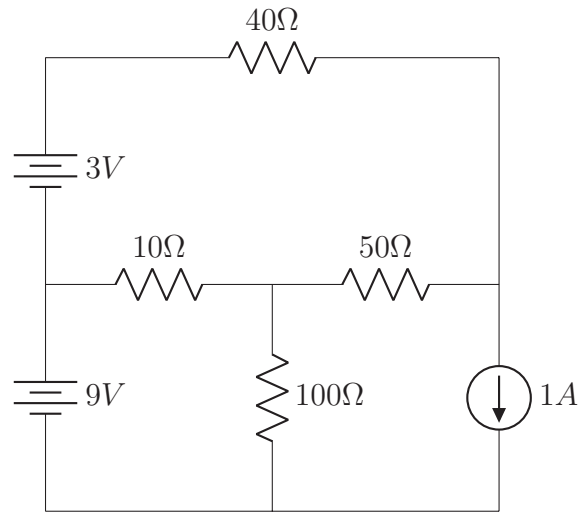
1) Velg en energikilde og fjern de andre fra kretsen. Du fjerner en spenningskilde ved å kortslutte (erstatte den med en leder), og du erstatter en strømkilde ved å åpne (bryte forbindelsen).

2) Beregn alle strømmer og spenninger. Til dette kan du f.eks. bruke nodeanalyse. Ta vare på resultatet.

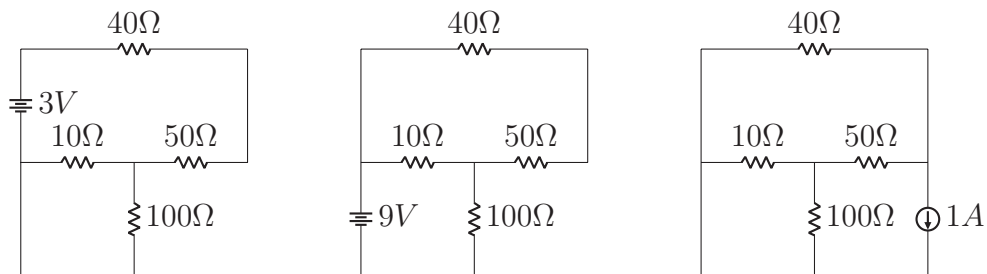
3) Gjenta trinn 2-3 for hver energikilde.

4) Summer resultatene. For å finne strømmer og spenninger når alle energikildene er tilstede legger du sammen resultatene du fant i trinn 2-4.

Eksempel: Kretsen under har tre energikilder: to spenningskilder og en strømkilde. Vi ønsker å finne strømmen gjennom motstanden på 40Ω .



Nå tar vi etter tur og velger én og én energikilde, mens vi fjerner de to andre fra kretsen. Det gir oss disse tre kretsene:

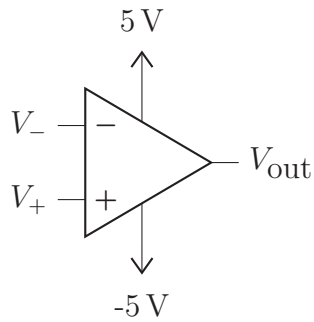


Vi analyserer nå hver av kretsene, f.eks. med nodeanalyse som tidligere beskrevet. Anta at vi da finner at spenningsfallet over motstanden på 40Ω er henholdsvis V_1 , V_2 og V_3 for de tre kretsene. Da er spenningsfallet over denne motstanden lik $V_1 + V_2 + V_3$ for den opprinnelige kretsen. Tilsvarende, hvis strømmen gjennom denne motstanden er I_1 , I_2 og I_3 for de tre kretsene, så er strømmen gjennom motstanden lik $I_1 + I_2 + I_3$ for den opprinnelige kretsen. Vi hopper her over disse beregningene.

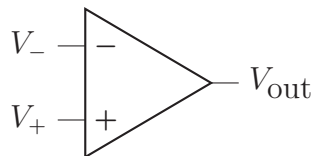
Operasjonsforsterkere

En operasjonsforsterker (op-amp) er egentlig en komplisert elektronisk krets med mange transistorer og motstander, men sett utenfra har den en veldig enkel oppførsel

og det er det eneste som interesserer oss her. I et kretsdiagram ser op-ampen slik ut:



Legg merke til at op-ampen er tilknyttet en spenningskilde, vist i tegningen over som to innganger markert $-5V$ og $5V$. Komponenter som er avhengige av å være tilknyttet en ekstern energikilde kalles *aktive komponenter*. I praksis vises ofte ikke disse inngangene for en op-amp, og op-ampen tegnes i stedet slik:



Op-ampen har to innganger og en utgang, og utgangssignalet er i teorien bestemt av inngangssignalene etter følgende formel:

$$V_{\text{out}} = G(V_+ - V_-)$$

Utgangssignalet er med andre ord lik differansen mellom inngangssignalene, multiplisert med et stort tall G . Vi får altså forsterket differansen mellom inputspenningene, og det er ikke uvanlig med en forsterkning på $G = 100,000$ eller mer. En spenningsforskjell på $1.5V$ mellom de to inngangene gir derfor etter formelen over en utgangsspenning på $150,000V$ eller mer, like mye som i en høyspentmast! I realiteten er imidlertid utgangsspenningen begrenset nedad og oppad av den tilknyttede spenningskilden. Hvis denne spenningskilden går fra $-5V$ til $5V$ som i den første op-amp tegningen, så vil utgangssignalet i realiteten være

$$V_{\text{out}} = \begin{cases} -5, & G(V_+ - V_-) \leq -5 \\ G(V_+ - V_-), & -5 < G(V_+ - V_-) < 5 \\ 5, & G(V_+ - V_-) \geq 5 \end{cases}$$

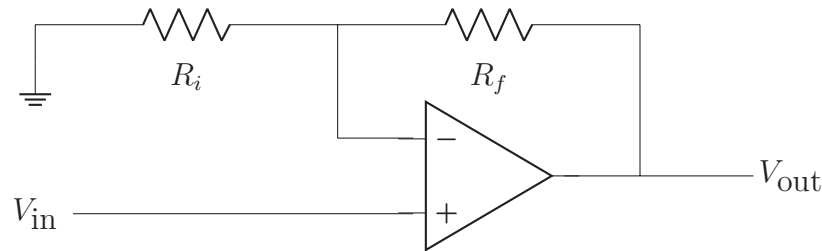
Den mest åpenbare anvendelsen av en op-amp å forsterke et svakt signal, på samme måte som en forsterker i et stereoanlegg brukes for å drive store høyttalere basert på et svakt inngangssignal fra en mobil eller liknende. Vi får da det vi kaller en *differensiell forsterker*, siden det er differansen mellom inngangssignalene som forsterkes. Dessverre er den svært høye forsterkningen problematisk for en slik anvendelse. Selv et svært lite inngangssignal vil gjøre at V_{out} treffer taket ($5V$) eller gulvet ($-5V$). Vi kan derfor i praksis tenke på en op-amp som en "detektor" som leverer $5V$ ut hvis $V_+ > V_-$ og som leverer $-5V$ ut hvis $V_+ < V_-$. En slik oppførsel er åpenbart lite formålstjenlig for en forsterker i et stereoanlegg. Med et enkelt grep kan vi likevel "temme" en op-amp til å gi lavere og mer kontrollerbar forsterkning. Grepet går essensielt ut på å kople utgangen til en av inngangene. Avhengig av måten vi gjør dette på, kan vi få op-ampen til å utføre en rekke forskjellige funksjoner, kort oppsummert i tabellen under.

Funksjon	I/O karakteristik	c
Ikke-inverterende forsterker	$V_{\text{out}} = c \cdot V_{\text{in}}$	$1 + \frac{R_f}{R_i}$
Inverterende forsterker	$V_{\text{out}} = -c \cdot V_{\text{in}}$	$\frac{R_f}{R_i}$
Spenningsreferanse	$V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$	
Differanseforsterker	$V_{\text{out}} = c \cdot (V_{\text{in},2} - V_{\text{in},1})$	$\frac{R_f}{R_i}$
Invers summerer	$V_{\text{out}} = -c \cdot (V_{\text{in},2} + V_{\text{in},1})$	$\frac{R_f}{R_i}$
Strøm-til-spenning konverterer	$V_{\text{out}} = -c \cdot I_{\text{in}}$	R_f

Ikke-inverterende forsterker

I en ikke-inverterende forsterker er utgangsspenningen proporsjonal med inngangsspenningen, dvs at vi har $V_{\text{out}} = c \cdot V_{\text{in}}$ hvor $c > 1$ bestemmer forsterkningen. Ved første øyekast ser dette helt identisk ut som den opprinnelige op-ampen, med unntak av at vi der kalte forsterkningen G og ikke c . Det er imidlertid en viktig forskjell: mens G var veldig stor og var "hardkodet" i op-ampen, kan vi selv bestemme hvilken verdi c skal ha. Dermed kan vi lett oppnå akkurat så stor forsterkning som vi trenger til å løse en bestemt oppgave. Vi starter med å velge to motstander (som vi kaller R_f og R_i) slik at $c = 1 + R_f/R_i$. Hvis vi for eksempel ønsker en forsterkning på $c = 11$, så kan vi velge $R_f = 10\Omega$ og $R_i = 1\Omega$. Vi kunne naturligvis også valgt $R_f = 100\Omega$ og $R_i = 10\Omega$, eller et hvilket som annet sett av verdier slik at ratioen mellom de to

motstandene blir 10. Det neste vi gjør er å sette opp følgende konfigurasjon:



Nå er vi fremme! Selv om det ikke er lett å se direkte, er det nå slik at hvis vi setter en spenning V_{in} på inngangen, så vil spenningen på utgangen bli $V_{\text{out}} = c \cdot V_{\text{in}}$, hvor $c = 1 + R_f/R_i$. Dermed har vi en forsterker hvor størrelsen på forsterkningen er fullt bestemt av de to motstandene. Vi må ta ett forbehold her: utgangsspenningen kan aldri bli høyere eller lavere enn øverste og nederste nivå for spenningskilden vi har koplet til op-ampen. Hvis vi for eksempel har koplet til en spenningskilde på $-5V$ og $5V$ slik vi gjorde når op-ampere ble introdusert tidligere, så vil dette definere nedre og øvre tak for utgangsspenningen.

Hvorfor er det slik at $V_{\text{out}} = c \cdot V_{\text{in}}$ i kretsen vist ovenfor? Spenningen mellom de to motstandene er ifølge spenningsdelerformelen lik $V = V_{\text{out}} \cdot R_i / (R_i + R_f)$. Vi setter inn dette uttrykket i formelen for op-ampere:

$$V_{\text{out}} = G(V_+ - V_-) = G \left(V_{\text{in}} - V_{\text{out}} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_f} \right)$$

Så løser vi med hensyn på V_{out} :

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \left(\frac{G}{1 + G \frac{R_i}{R_i + R_f}} \right)$$

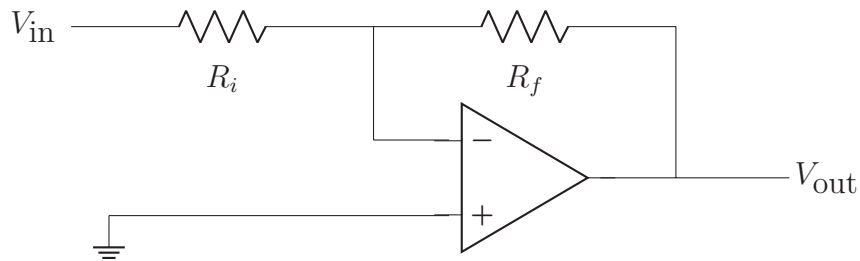
Dette uttrykket ser ikke spesielt pent ut, men husk at G er veldig stor for en typisk op-amp. Det betyr at vi i praksis kan ignorere addisjonen med 1 i nevneren og da blir uttrykket enklere:

$$V_{\text{out}} \approx V_{\text{in}} \left(\frac{G}{G \frac{R_i}{R_i + R_f}} \right) = V_{\text{in}} \left(\frac{1}{\frac{R_i}{R_i + R_f}} \right) = V_{\text{in}} \left(\frac{R_i + R_f}{R_i} \right) = V_{\text{in}} \left(1 + \frac{R_f}{R_i} \right)$$

Det er verdt å merke seg at denne approksimasjonen er god nettopp fordi G er så stor i en op-amp. Det er også verdt å merke seg at spenningen V ikke er helt lik V_{in} . Hadde den vært det, ville jo formelen for op-ampere sagt at $V_{\text{out}} = 0$.

Inverterende forsterker

En inverterende forsterker returnerer en utgangsspenning med motsatt fortegn av inngangsspenningen. Dvs vi har $V_{\text{out}} = -c \cdot V_{\text{in}}$ hvor $c > 0$ bestemmer forsterknin-gen. Vi starter med å velge to motstander (som vi også her kaller R_f og R_i) slik at $c = R_f/R_i$. Det neste vi gjør er å sette opp følgende konfigurasjon:



Merk at *eneste forskjellen* mellom denne konfigurasjonen og den vi hadde for en ikke-inverterende forsterker, er at vi har byttet om på jord og V_{in} .

Hvorfor er det slik at $V_{\text{out}} = -c \cdot V_{\text{in}}$ i kretsen vist ovenfor? Vi bruker samme teknikk som vi gjorde for ikke-inverterende forsterkere og finner først spenningen mellom de to motstandene. Spenningen til venstre for de to motstandene er V_{in} og spenningen til høyre for dem er V_{out} . Dermed er spenningsfallet over begge motstandene lik $V_{\text{out}} - V_{\text{in}}$, og total resistanse er $R_f + R_i$. Fra Ohms lov er derfor strømmen gjennom motstandene lik

$$I = \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{R_f + R_i}$$

Anta at spenningen mellom de to motstandene er V . Vi kan bruke Ohms lov på en av motstandene - la oss si den venstre - og finner da at

$$V - V_{\text{in}} = I \cdot R_i = \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{R_f + R_i} \cdot R_i$$

Dermed er

$$V = V_{\text{in}} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{R_f + R_i} \cdot R_i$$

Nå setter vi dette uttrykket inn i formelen for op-amper:

$$V_{\text{out}} = G(V_+ - V_-) = G\left(0 - V_{\text{in}} - \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{R_f + R_i} \cdot R_i\right)$$

Løser vi med hensyn på V_{out} så får vi

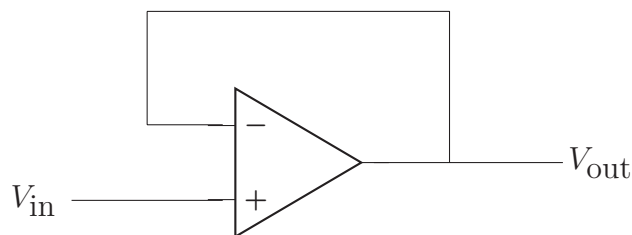
$$V_{\text{out}} = \frac{-G \cdot V_{\text{in}} \left(\frac{R_f}{R_f + R_i} \right)}{1 + G \cdot \frac{R_i}{R_f + R_i}}$$

Siden G er veldig stor kan vi i praksis ignorere addisjonen med 1 i nevneren og da blir uttrykket enklere:

$$V_{\text{out}} \approx \frac{-G \cdot V_{\text{in}} \left(\frac{R_f}{R_f + R_i} \right)}{G \cdot \frac{R_i}{R_f + R_i}} = \frac{-V_{\text{in}} \left(\frac{R_f}{R_f + R_i} \right)}{\frac{R_i}{R_f + R_i}} = -V_{\text{in}} \left(\frac{R_f}{R_i} \right)$$

Spenningsreferanse

En spenningsreferanse har en tilsynelatende lite interessant I/O-karakteristikk, nemlig at $V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$. Vi kunne jo fått til dette ved å bare sette inn en leder mellom inngangen og utgangen! Det er likevel en viktig forskjell. I en spenningsreferanse så er vi garantert (iallfall i prinsippet) at spenningen forblir V_{in} selv om vi trekker strøm fra utgangen, f.eks. for å drive en elektromotor. Hadde vi koplet inngangen direkte til utgangen i stedet, hadde vi ikke hatt en slik garanti (det er ikke sikkert at inngangen er i stand til å levere mye strøm uten at V_{in} endres). Poenget med en spenningsreferanse er altså å kopiere spenningen fra inngangen over til utgangen, men samtidig å sette inn en ekstra energikilde som sikrer at utgangsspenningen forblir den samme selv om strøm belastes. Den ekstra energikilden er den vi har koplet til op-ampen (se innledningen om op-ampere). Vi sier derfor også at spenningsreferansen fungerer som et *buffer*, og siden forsterkningen er lik 1 kalles det også for *unity gain buffer*. Konfigurasjonen er slik:



Vi kunne kommet frem til denne ved å starte med en ikke-inverterende forsterker og sette $R_i = \infty$ og $R_f = 0$. Bruker du formelen for en ikke-inverterende forsterker finner du da at $c = 1$ slik at $V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$.