

IN 1080

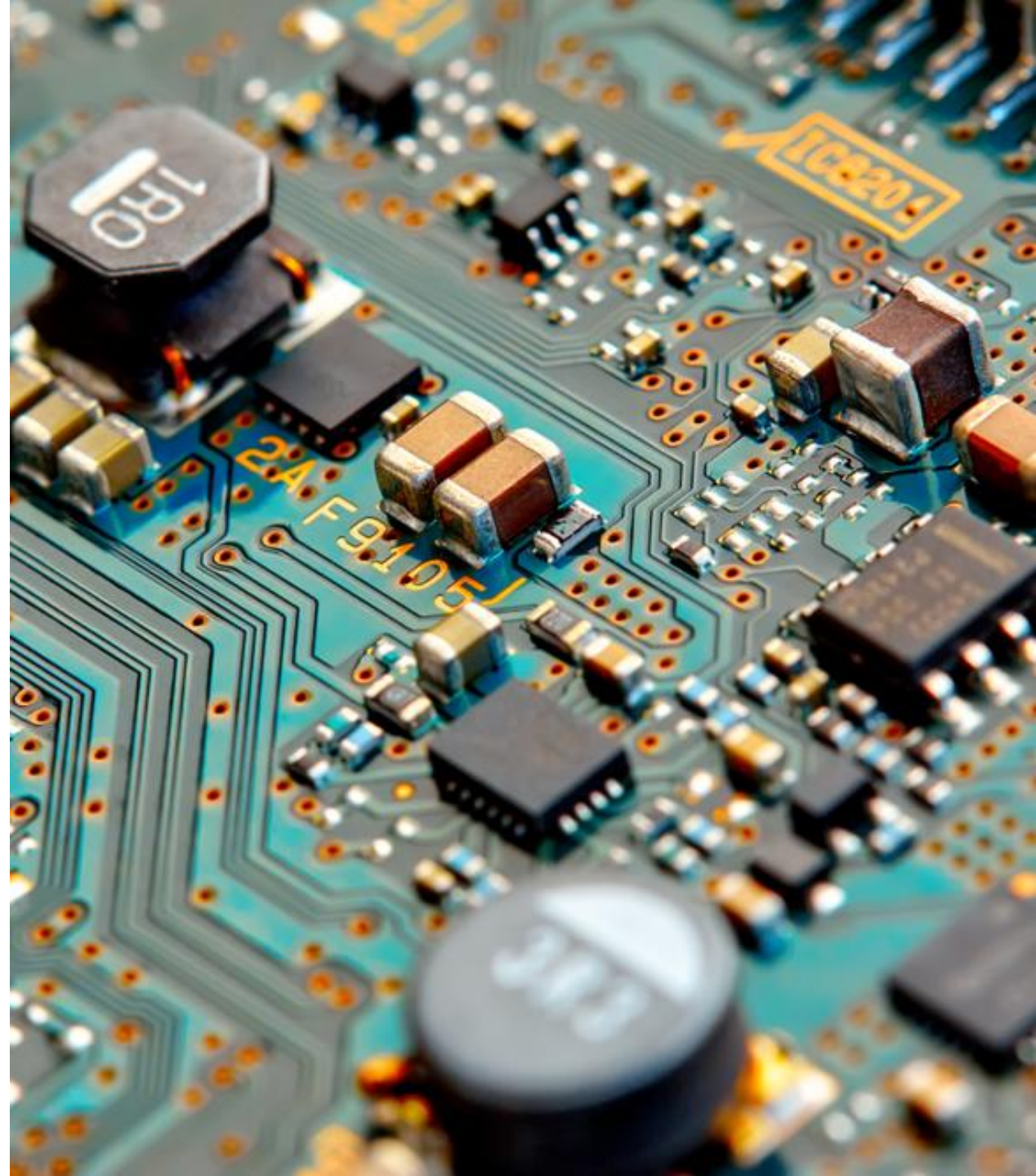
Mekatronikk

Del 1: Analog elektronikk

Forelesning 4



UNIVERSITETET
I OSLO



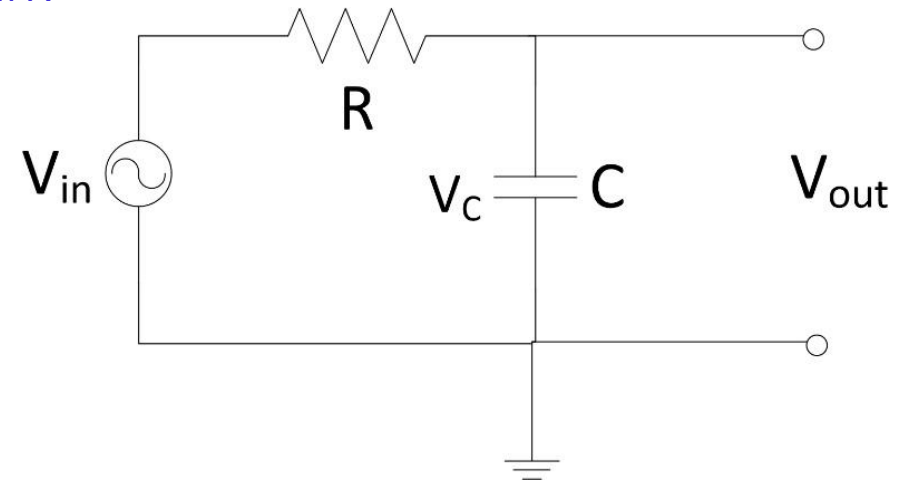
Om dagens forelesning

- I denne forelesningen skal vi se mer på
 - Seriekobling og parallellkobling av kondensatorer
 - Analyse i tidsplanet av RC-kretser
 - Naturlig respons til en RC-krets
 - Tidsrespons når spenningskilden er en pulsformet ac-spenning
 - Analyse i frekvensplanet
 - Hvordan oppfører RC-kretsen seg når frekvensen til spenningskilden endrer seg?
 - Bruk av RC-kretser – et par eksempler

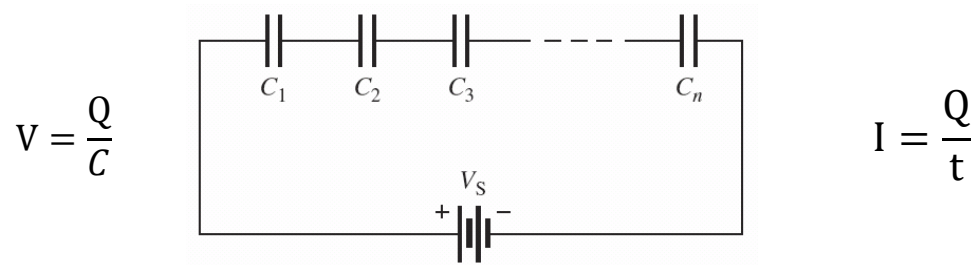


Oppgave – beregning av V , I og Z

- 1) Gitt RC-kretsen til høyre. Hva er sammenhengen mellom V_{out} og V_c ?
- 2) Hvordan kan vi finne fasevinkelen (faseforskyvning mellom Z og R) for denne kretsen?
- 3) Anta at $R=1k\Omega$ og $C=0,01\mu F$. Finn den totale impedansen Z og fasevinkelen θ mellom R og Z for følgende tre frekvenser:
 - Spm 3.1: 10 kHz
 - Spm 3.2: 20 kHz
 - Spm 3.3: 30 kHz
- 4) Hva er V_{out} uttrykt ved V_{in} , R og X_c ?
- 5) Forklar hva som skjer med amplituden til V_{out} når frekvensen til V_{in} øker
- 6) Forklar hva som skjer med fasevinkelen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker
- 7) Hva skjer med tidsforsinkelsen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker?



Kapasitans for seriekoblede kondensatorer



- Hver kondensator lagrer samme ladning fordi strømmen mellom hvert element er den samme:

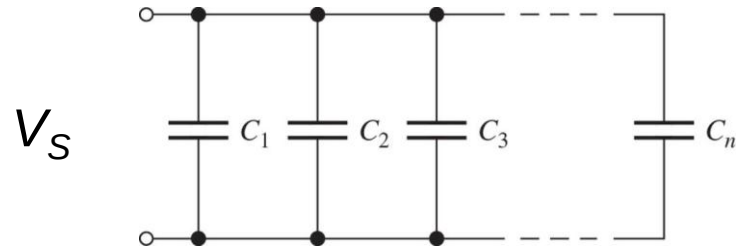
$$Q_{Tot} = Q_{C1} = Q_{C2} = \dots = Q_{Cn}$$

- KVL gir at $V_S = V_{C1} + V_{C2} + \dots + V_{Cn}$
- Dette gir

$$\frac{Q}{C_{Tot}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow C_{Tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

- Utrykket har samme form som resistorer i *parallel*

Kapasitans for parallellkoblede kondensatorer



- Den totale ladningen er lik summen av ladningene over hver kondensator:

$$Q_{Tot} = Q_{C1} + Q_{C2} + \dots + Q_{Cn}$$

- Siden $Q=CV$, blir $C_{Tot}V_S = C_1V_S + C_2V_S + \dots + C_nV_S \Rightarrow C_{Tot} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$
- Uttrykket har samme form som resistorer i *serie*

Respons

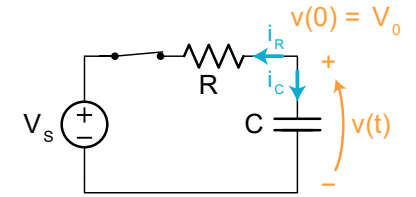
- **Respons** betyr hvordan en krets oppfører seg for en gitt type input eller kilde
- Det er vanligst å se på forholdet mellom strøm og/eller spenning på inngang og utgang enten som funksjon av **tid** eller **frekvens**
- Vi har undersøkt sammenhengen mellom strøm og spenning som funksjon av **tid** i en RC-krets når den er koblet til en **sinusformet** spenningskilde
- Oppførselen til en RC-krets når kilden genererer en firkantpuls kalles **pulsresponsen**
- Et spesialtilfelle av pulsrespons kalles **naturlig respons**, hvor man beskriver kretsens oppførsel når kilden er fjernet (kortsluttet)
- **Frekvensrespons** beskriver hvordan strøm, spenning og impedans endrer seg når *frekvensen* til kilden varierer (og ikke som funksjon av tid)

Naturlig respons

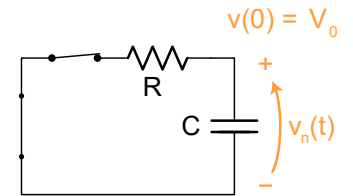
- Naturlig respons er oppførselen når kretsen ikke lenger er utsatt for ytre påvirkning fra strøm- eller spenningskilder
- Vi antar at det har vært en påvirkning som gjør at det f.eks. fortsatt går en strøm eller at en kondensator er oppladet.
- Ved et tidspunkt $t = 0$ fjernes strøm- og spenningskilder og videre oppførsel bestemmes bare av kretsens „naturlige“ egenskaper
- Den naturlige responsen er også grunnleggende for å beskrive oppførselen hvis spenningskilden ikke lenger endrer verdi

Naturlig respons for RC-krets (1)

- Antar at kondensatoren er helt oppladet ved tidspunkt $t=0$ med spenningen $v_c=V_0$
 - Den må altså ha vært tilkoblet en spenningskilde for å være helt oppladet før tidspunktet $t=0$ og spenningskilden blir kortsluttet ved $t=0$
- Kondensatoren vil utlades gjennom R og vi skal finne en formel for hvordan v_c endrer seg over tid som funksjon av V_0 , R og C



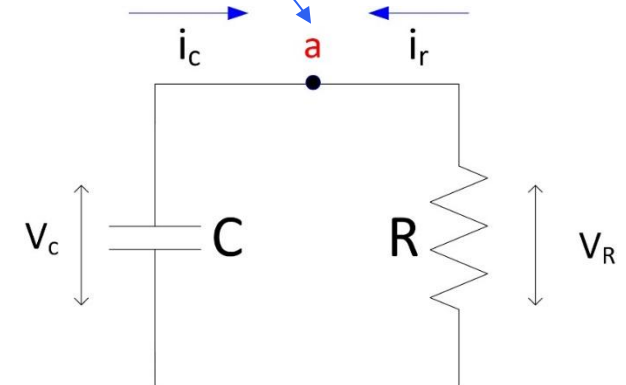
Kondensatoren er helt oppladet og deretter kortsluttes V_s



- Bruker Kirchhoffs strømlov (KCL) mot node **a**:

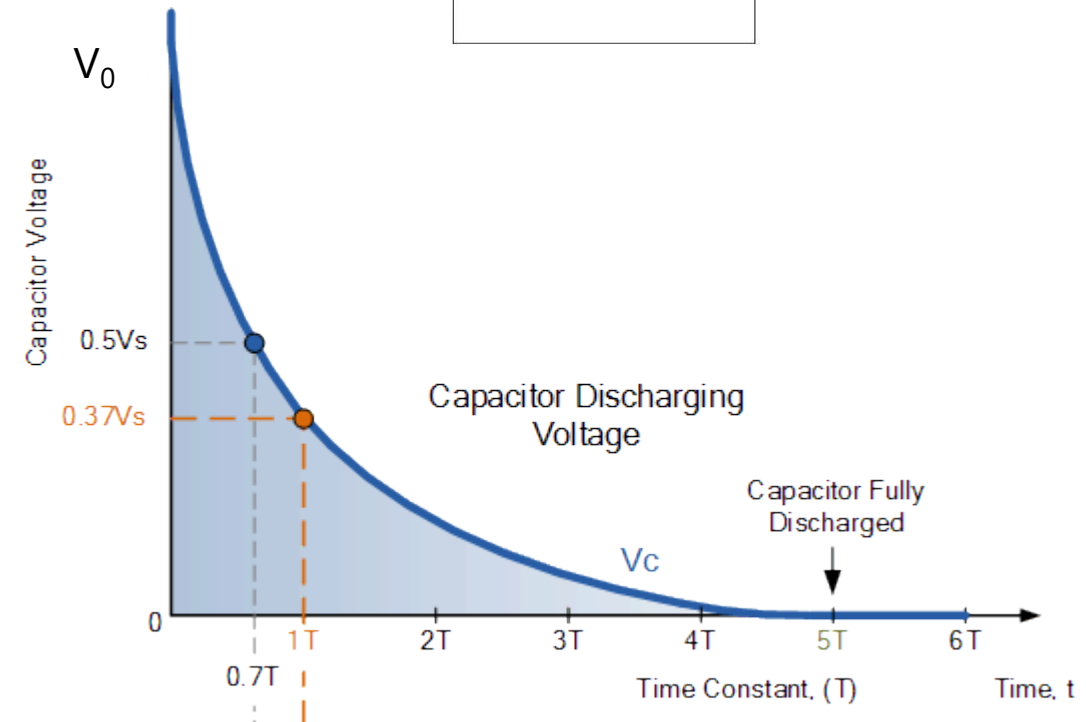
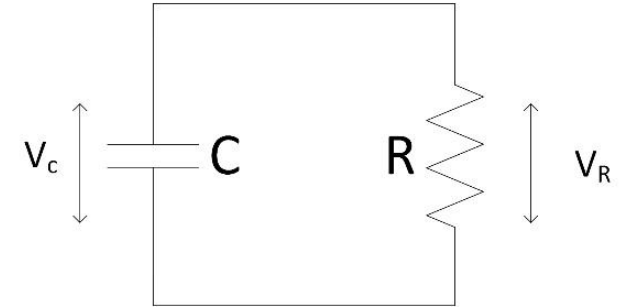
$$i_c + i_r = 0 \Rightarrow C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_R}{R} = 0 \Rightarrow C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$$

- Løsningen på denne differensialligningen er $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ (vi skal ikke vise dette)



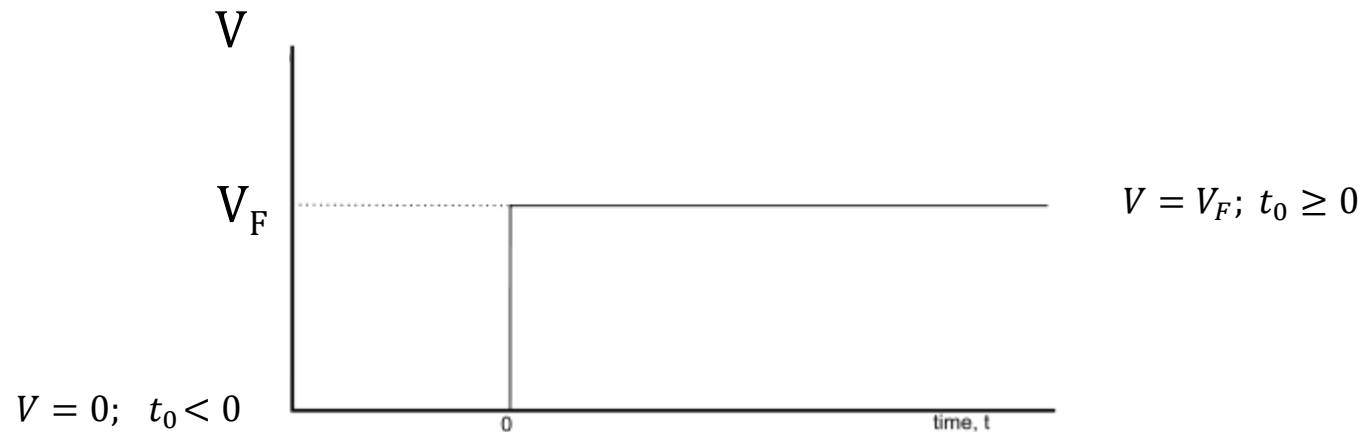
Naturlig respons for RC-krets (2)

- Vi kaller $\tau = RC$ for en **tidskonstant** og bruker τ videre i formelen
- Tidskonstanten er en skalering som gjør at alle RC-kretser får samme form på utladningskurven, uavhengig av verdien til R og C
- Spenningen v_c over kondensatoren etter tiden t er dermed $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Etter tiden $t=1\tau$ har kondensatoren ladet seg ut til 37% av opprinnelig spenning
- Etter $t=5\tau$ har kondensatorspenningen falt til 0.67% av opprinnelig spenning
 - Kondensatoren betraktes som utladet ved $t=5\tau$
- Hvor lang tid det tar er dermed avhengig av R og C
 - Hvis R øker: lenger tid på å lade ut fordi færre elektroner kan bevege seg per sekund
 - Hvis C øker: lenger tid på å lade ut fordi det er større mengde elektroner som må bevege seg.
 - Når C er større, blir også maksimal V_0 større (flere ladninger gir kraftigere elektromagnetisk felt)



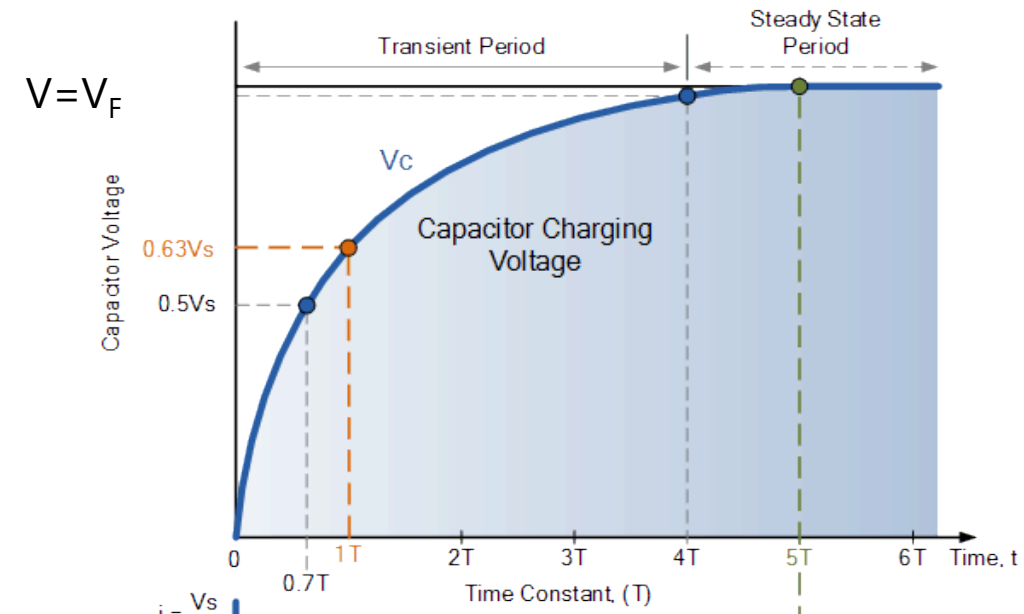
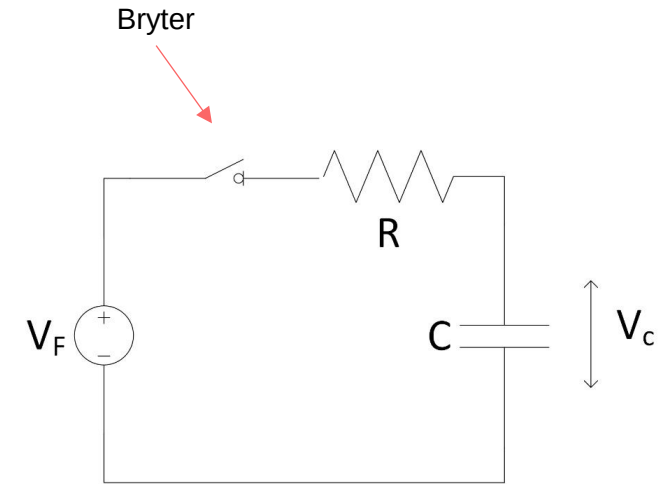
Pulsrespons for RC-krets (1)

- Formelen for den naturlige responsen kan «utvides» for å finne *pulsresponsen* til en RC-krets
- Ved pulsrespons er spenningskilden en dc-kilde som varierer mellom to faste verdier
- Ideelt sett går spenningen fra ett nivå til det neste i løpet av null tid
 - I praksis er det umulig at en spenning endrer verdi på null tid, men antagelsen forenkler analysen
- Vi skal først se på tilfellet hvor spenningen går fra 0 til V_F volt og kondensatoren lades opp gjennom en resistor



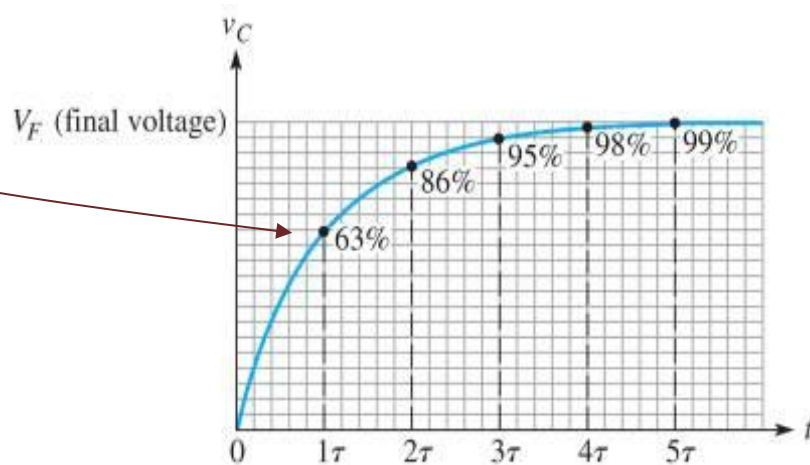
Pulsrespons for RC-krets (2)

- Pulsrespons kan lages ved en ideel bryter som kobler en dc-kilde med spenning V_F til kretsen ved tidspunkt $t=0$.
- Vi forutsetter at kondensatoren er helt utladet før vi kobler til kilden, dvs $v_c = 0\text{V}$ når $t < 0$
- Oppladningskurven er gitt av formelen $v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
 - Etter tiden $t=1\tau$ har kondensatoren ladet seg opp til ca. 63% av maksimal spenning
 - Etter $t=5\tau$ har kondensatorspenningen økt til ca. 99.33% av maksimal spenning
 - Kondensatoren betraktes som helt oppladet etter $t=5\tau$

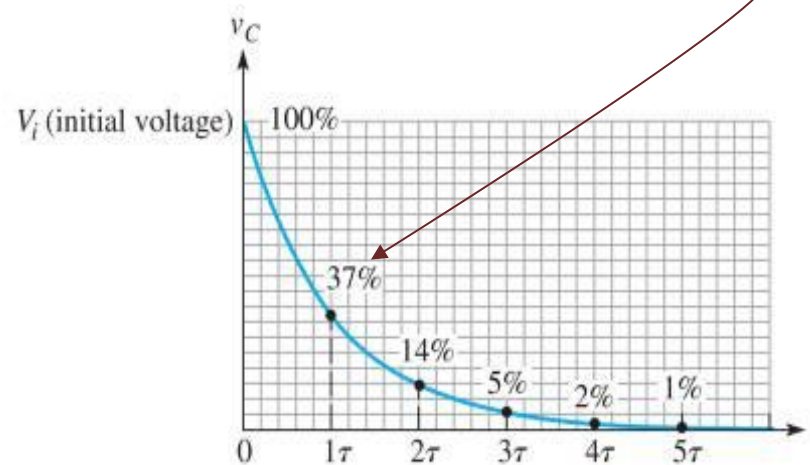


Pulsrespons for RC-krets (3)

- Vi kan sammenligne oppførselen ved hhv utladning og opplading av kondensatorspenningen når spenningskilden gir pulsformet spenning
 - Kondensatorspenningen faller eksponentielt på samme måte som ved naturlig respons etter formelen $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ når spenningskilden går fra høy til lav spenning
 - Kondensatorspenningen øker eksponentielt etter formelen $v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ når spenningskilden går fra lav til høy spenning
- $\tau = 1$ betyr at
 - En fullt **utladet** kondensator har nådd ca 63% av den maksimale spenningen V_F
 - En fullt **oppladet** kondensator har falt til ca 37% av den opprinnelige spenningen V_i



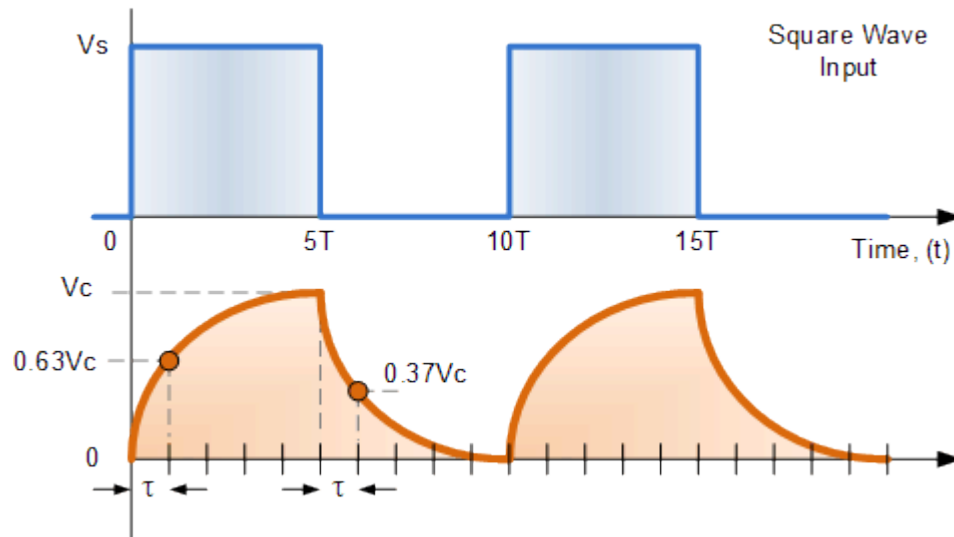
(a) Charging curve with percentages of the final voltage



(b) Discharging curve with percentages of the initial voltage

Pulsrespons for RC-krets (4)

- I de to tilfellene vi har sett på så langt har kondensatoren enten vært helt utladet eller helt oppladet **før** vi startet ny oppladning eller utladning
- Formlene kan utvides til å dekke tilfellene hvor kondensatoren ikke blir helt oppladet eller utladet mellom hver gang **og** hvor pulssignalet veksler mellom høy og lav hele tiden (og ikke bare en gang)
 - Formlene lar seg lett generalisere til også å gjelde strømmen gjennom kretsen



$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Generelt

$$v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Oppladning fra 0v til V_F og $V_i = V_0 = 0v$

$$v_c = V_i e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Utladning fra V_i til 0 og $V_F = 0v$

Oppsummering puls- og naturlig respons

- Hva er viktig å kunne/huske:
 - **Oppladning** og **utladning** skjer ikke momentant
 - Opp- og utladningskurvene er **eksponentielle**
 - **Naturlig respons** er oppførselen ETTER at spenningskilden er kortsluttet (altså ingen påvirkning fra eksterne kilder)
 - **Pulsrespons** er oppførselen når
 - Spenningskilden går fra maksimal spenning til 0 (tilsvarer naturlig respons)
 - Spenningskilden går fra 0 til maksimal spenning
- **Tidskonstanten** $\tau = RC$ sier hvor raskt utladningen eller oppladningen skjer
- Ligningen for **utladning** er $v_c = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Ligningen for **oppladning** er $v_c = V_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- Etter $t = 5\tau$ er kondensatoren i praksis helt oppladet eller helt utladet
- Vi må **regne ut RC** for å finne opp/utladningstiden for en konkret RC-krets

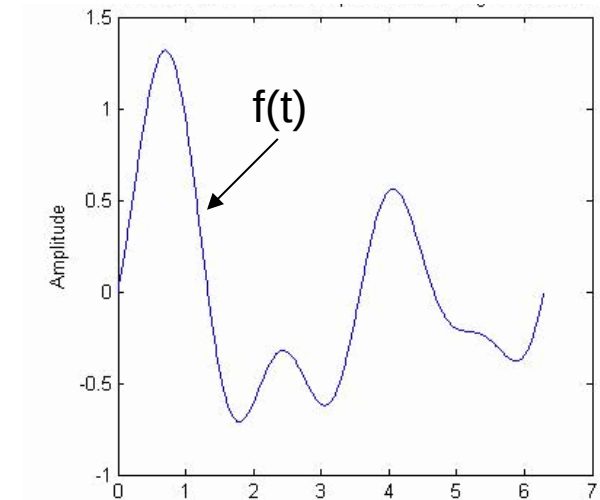
Fouriers teorem

- Et periodisk signal kan skrives som en sum av sinus- og cosinussignaler vha Fourier-transform
 - Vi skal ikke bevise dette, men kun se på et eksempel og bruke resultatet
- *Fourier-serien* beskriver hvordan et periodisk signal $f(t)$ kan skrives som en funksjon $g(t)$ som er en (uendelig) sum av sinus- og cosinusledd
- *Fourier-transform* er prosessen med å finne Fourier-serien
- Vi antar derfor at ethvert periodisk inputsignal kan skrives på denne formen:
 - Det kan også vises at vi strengt tatt kun trenger bare sinus eller bare cosinus

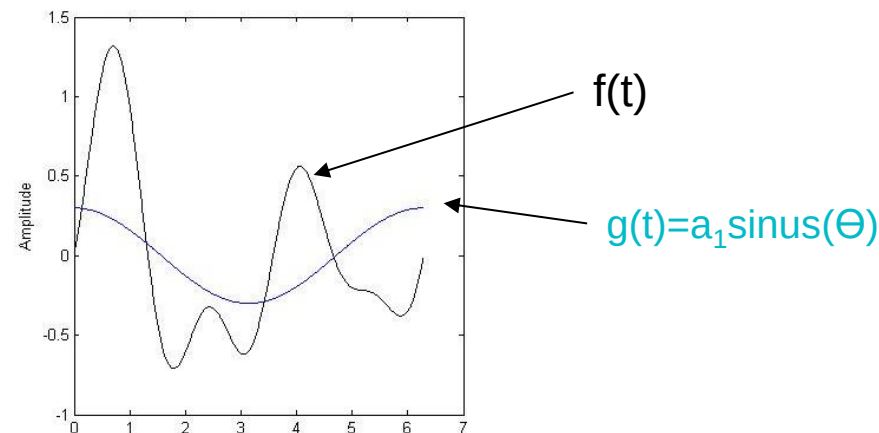
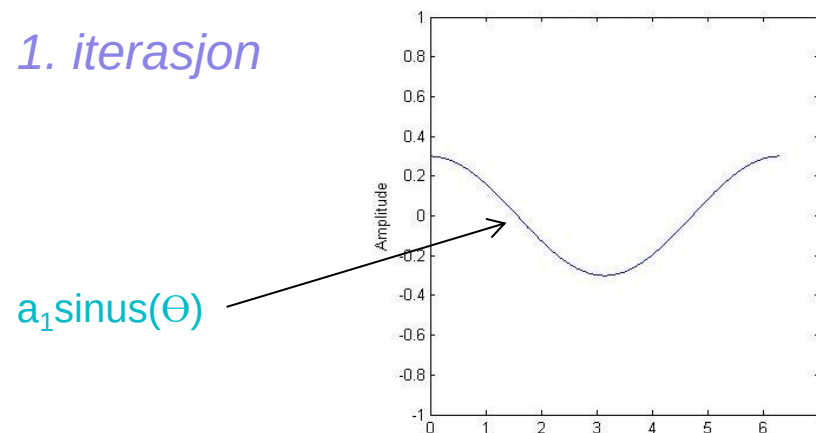
$$g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$


Fouriers teorem: eksempel 1

- Ønsker å finne hvilke sinuskomponenter som trengs for å beskrive $f(t)$ med en Fourierserie $g(t)$
- For å vise prosessen skal vi gradvis prøve med flere og flere ledd i $g(t)$ og deretter se om $g(t)$ er en god tilnærming til $f(t)$
 - Skal kun illustrere tilpasningen, ikke regne oss frem til den
- Starter med $g(t)$ med ett enkelt ledd
 $a_1 = 0.3$, $T=2\pi$ og $\theta=1/2\pi$; θ kalles *grunnfrekvensen*



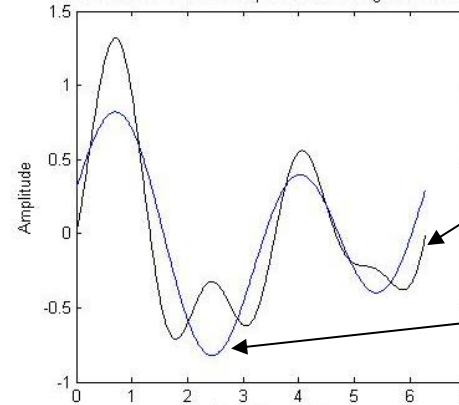
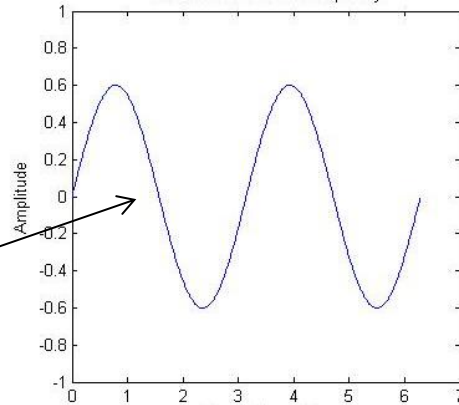
1. iterasjon



Fouriers teorem: eksempel 1 (forts.)

2. iterasjon

$a_3 \sin(3\theta)$

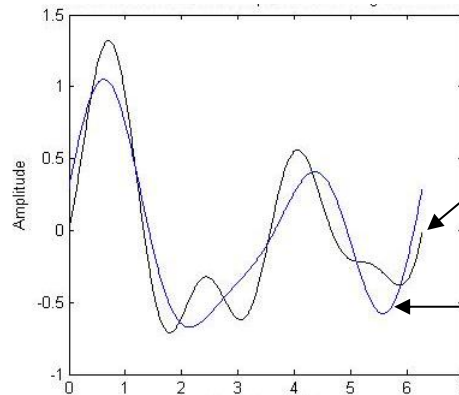
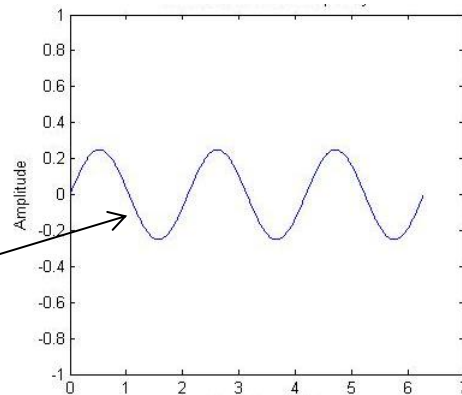


$f(t)$

$g(t) = a_1 \sin(\theta) + a_3 \sin(3\theta)$

3. iterasjon

$a_5 \sin(5\theta)$

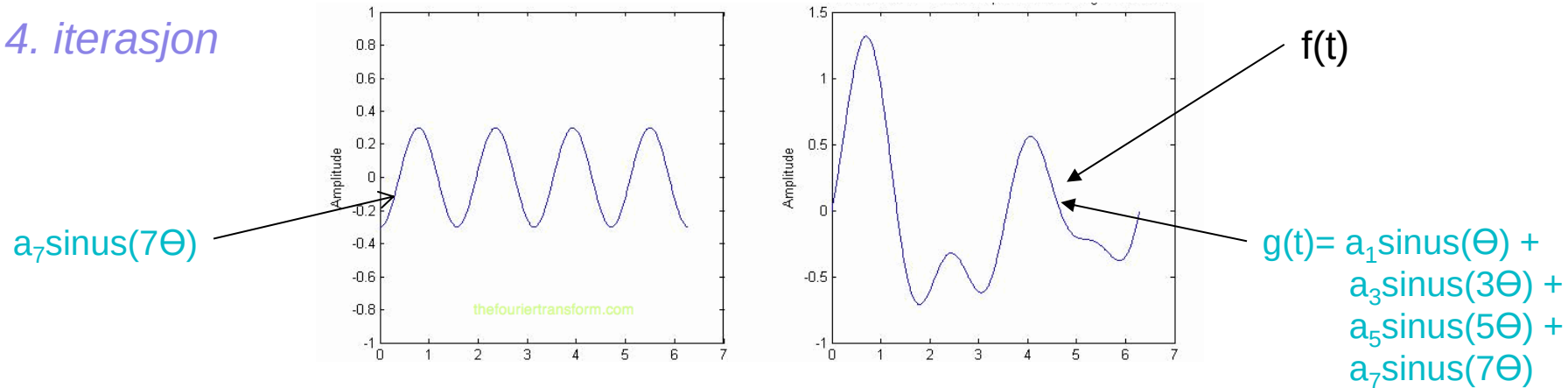


$f(t)$

$g(t) = a_1 \sin(\theta) + a_3 \sin(3\theta) + a_5 \sin(5\theta)$

Fouriers teorem: eksempel 1 (forts.)

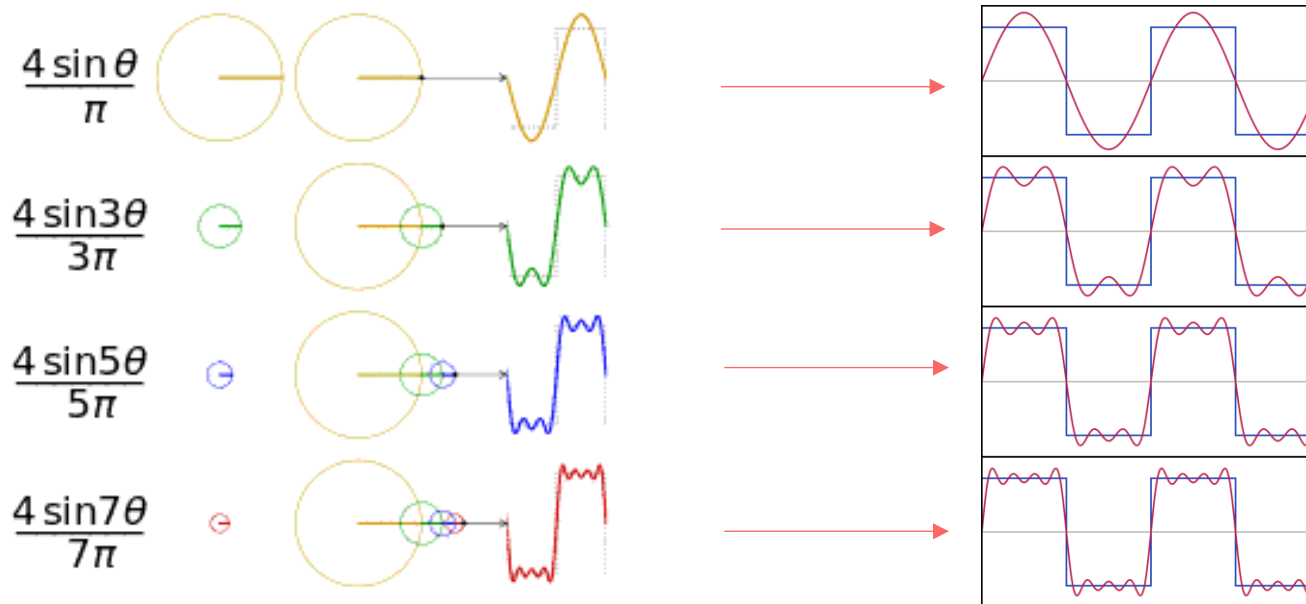
4. iterasjon



- For at $g(t) \approx f(t)$ trengte vi fire sinusledd med fire ulike frekvenser som er et helt antall ganger grunnfrekvensen θ (3θ , 5θ osv.)
- Hvor mange ledd vi trenger avhenger bla av hvor nøyaktig vi trenger å være
- Legg merke til at vi ikke har vist hvordan man går frem for å finne $g(t)$ generelt.

Fouriers teorem: eksempel 2

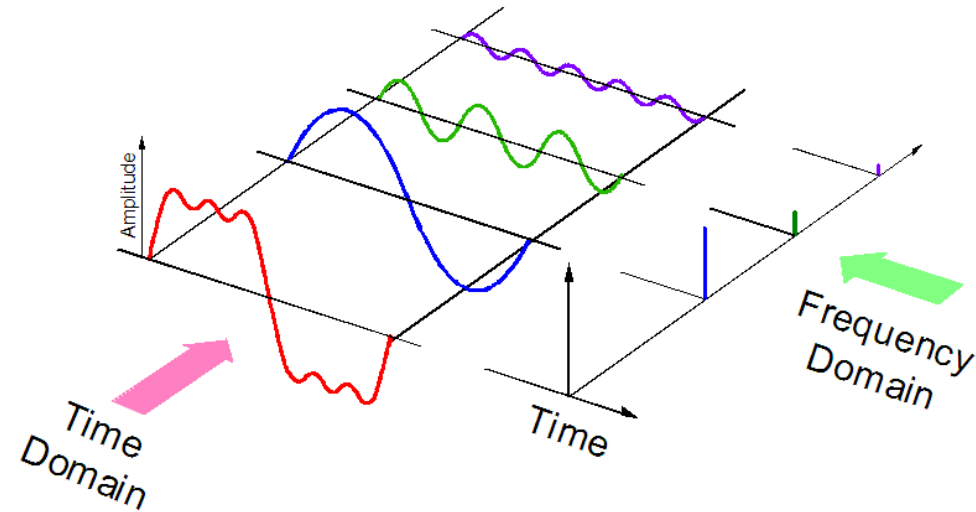
- Tilnærming til firkantbølge som sum av fire grunnfrekvenser



- Vi kan derfor beskrive digitale signaler som en Fourier-serie så nøyaktig vi ønsker ved å ta med så mange ledd som mulig

Sammenheng mellom frekvens og tid

- Når vi beskriver et ac-signal er det noen ganger som funksjon av tid, andre ganger som funksjon av frekvens
- Signalets amplitude er den samme i begge tilfeller



Bruk av RC-kretser: Filtre (1)

- Et *filter* er en innretning som slipper gjennom «ting» med bestemte egenskaper og blokker andre
- Vi kjenner filtre fra dagliglivet, f.eks. en tesil, som slipper gjennom vann (veldig små molekyler), men blokkerer teblader (store objekter sammenlignet med vannmolekyler)



- Utesteder med aldersgrense har også en type filter:
 - Yngre 20 år: Ingen adgang
 - 20 år eller eldre: Adgang

Filtre (2)

- I elektronikk og elektriske systemer trenger vi mange ulike typer filtre for å slippe gjennom det vi ønsker og sperre det vi ikke ønsker:
 - Stoppe uønskede høyspenninger inn til bolighus (ved lynnedslag):
Overspenningsvern
 - Forhindre at det går for mye strøm gjennom ledninger (overbelastning):
Automatsikring
- Hvordan og hva man stopper varierer fra en anvendelse til en annen, men formålet er uansett å stoppe det vi ikke ønsker og slippe gjennom det vi ønsker



Filtre (3)

- Vi skal se nærmere på filtre som stopper visse frekvenser i signaler samtidig som andre frekvenser slippes gjennom



- Filtre har ulike egenskaper; en av de viktigste er hvilke frekvenser som stoppes og hvilke som slippes gjennom :
 - *Høypassfiltre* stopper lave frekvenser og slipper gjennom høye
 - *Lavpassfiltre* slipper gjennom lave frekvenser og stopper høye
 - *Båndpassfiltre* slipper igjennom frekvenser i et bestemt område og stopper frekvenser utenfor dette området
 - *Båndstoppfiltre* stopper frekvenser innenfor et bestemt område og slipper gjennom frekvenser utenfor dette området

Filteregenskaper og gain (1)

- Egenskapene og oppførselen til et filter kalles *filterkarakteristikken*
- En viktig egenskap er *gain* (forsterkning) og er forholdet mellom utsignalet og innsignalet
- Den enkleste varianten er se på forholdet mellom utgang og inngang for samme signaltipe:

$$G_v = A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} \qquad G_i = A_i = \frac{i_{out}}{i_{in}}$$

- A = “Amplification” $\approx$ “Gain” er sammenheng mellom inngang og utgang, og måles ofte i decibel (dB)

$$\underbrace{G_{dB} = 10 * \log(A_v)}_{\text{dB for spenningsgain}}$$

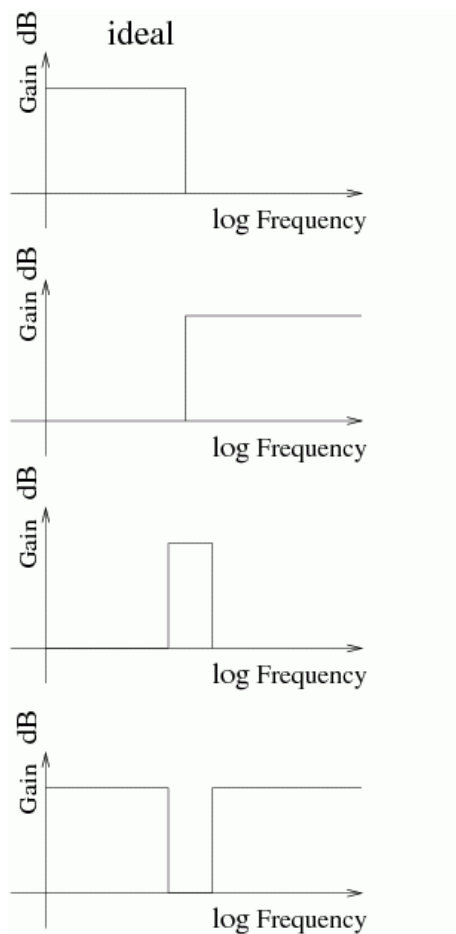
$$\underbrace{G_{dB} = 10 * \log(A_i)}_{\text{dB for strømgain}}$$

Filteregenskaper og gain (2)

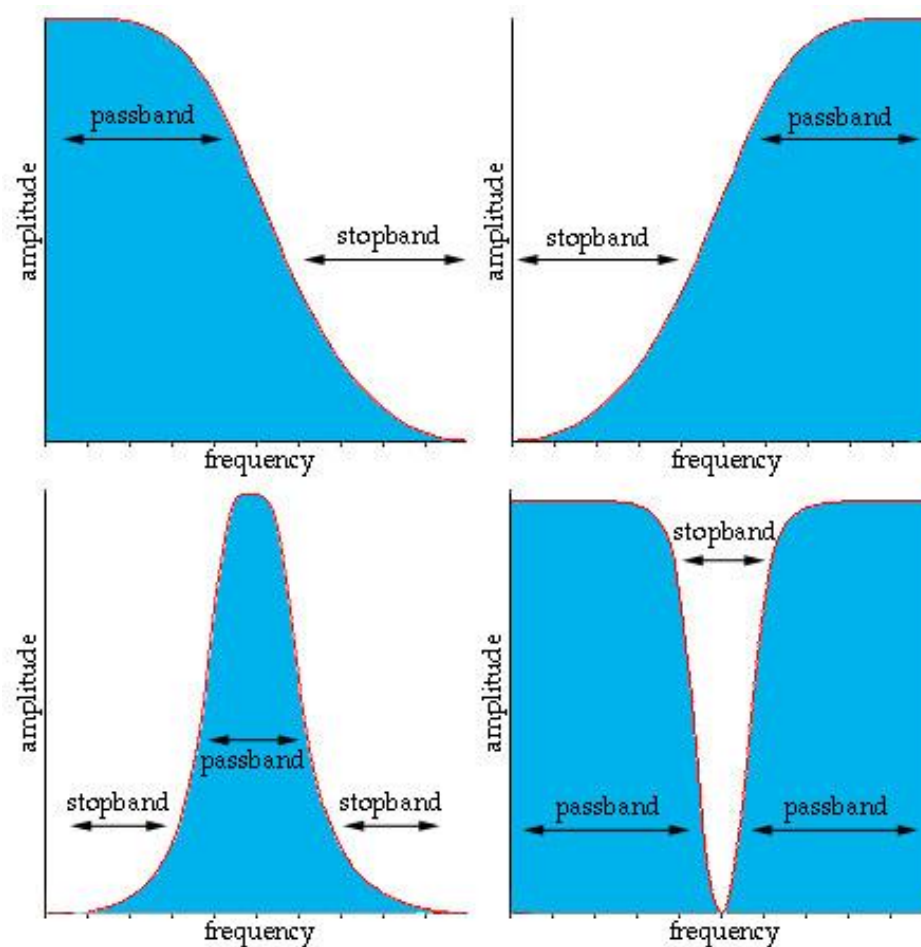
- Sammenheng mellom noen dB-verdier og Gain for spenningsforsterkning
 - 0 dB tilsvarer $V_{\text{out}}=V_{\text{in}}$ og $A_v = 1$, dvs ingen forsterkning
 - ~6 dB tilsvarer $V_{\text{out}} \approx 4 \cdot V_{\text{in}}$
 - 20 dB tilsvarer $V_{\text{out}} = 100 \cdot V_i$ og $A_v = 100$
 - -20 dB tilsvarer $V_{\text{out}} = 0.01 \cdot V_i$ og $A_v = 0.01$
 - 30 dB tilsvarer $V_{\text{out}} = 1000 \cdot V_i$ og $A_v = 1000$
- decibel-skalaen er svært utbredt innen bla akustikk, antennemålinger, audio-elektronikk, energi, feltstyrke, osv, MEN (advarsel):
 - Både formlene for å regne ut og navnene varier, f.eks dBV, dBA, dB Q, dBsm, dBJ
 - Noen fagfelt bruker $db = 20 * \log(X_p)$

Ideelle versus fysiske filtre

Ideelle filtre

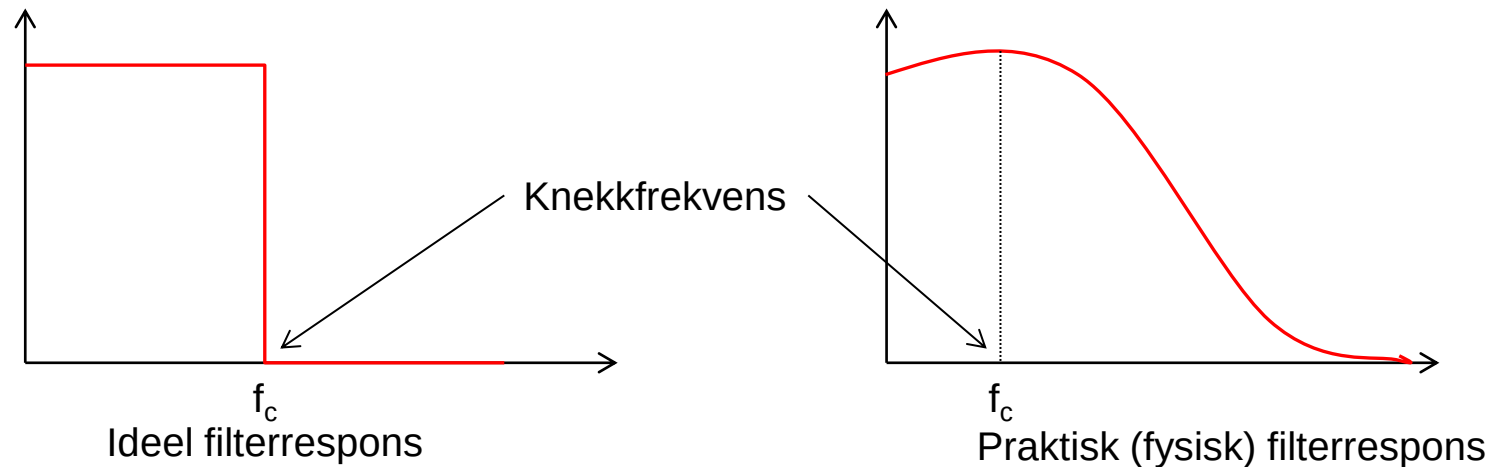


Fysiske filtre



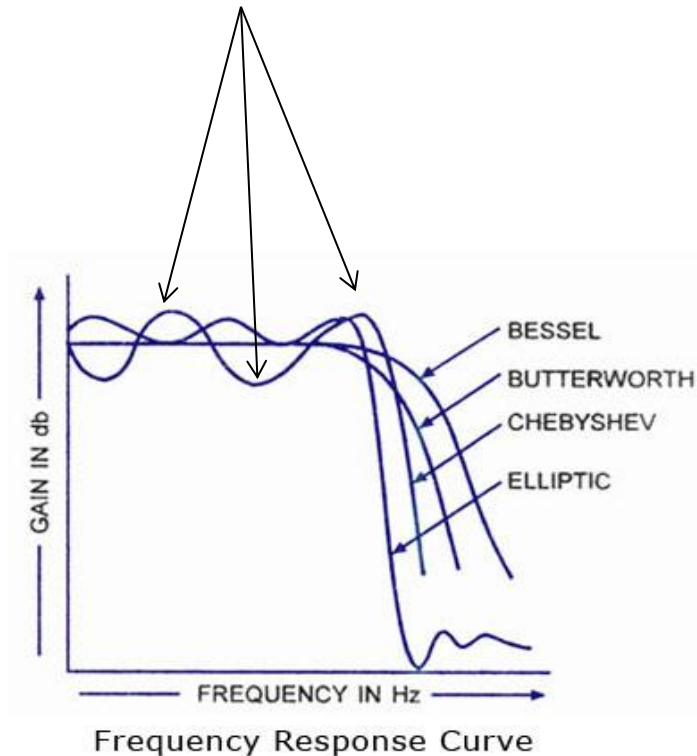
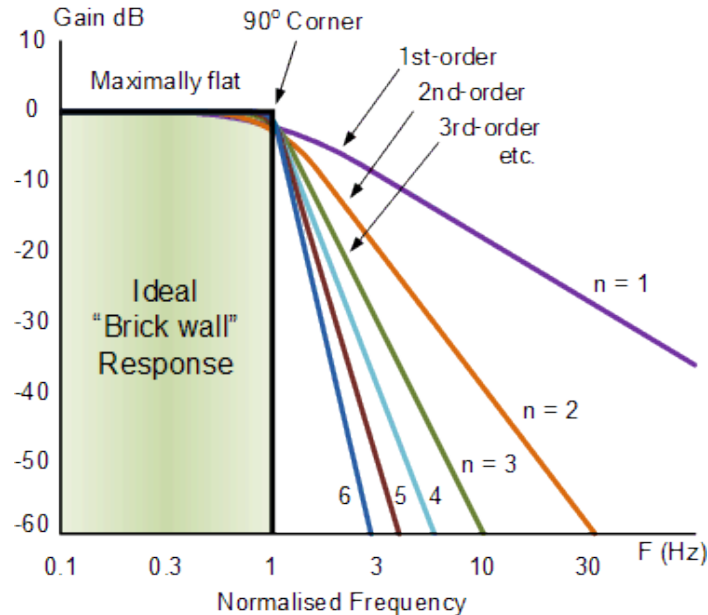
Knekkfrekvens

- Knekkfrekvensen («cutoff») er frekvensen hvor filteret begynner å slippe igjennom (eller stoppe) signaler
- **Ideelle filtre** slipper gjennom signaler i passområdet *uten demping*, og *stopper fullstendig* signaler utenfor
- **I praksis** dempes signaler i passområdet, og stoppes ikke helt i stoppområdet
- Båndbredden er frekvensområdet som slipper igjennom filteret



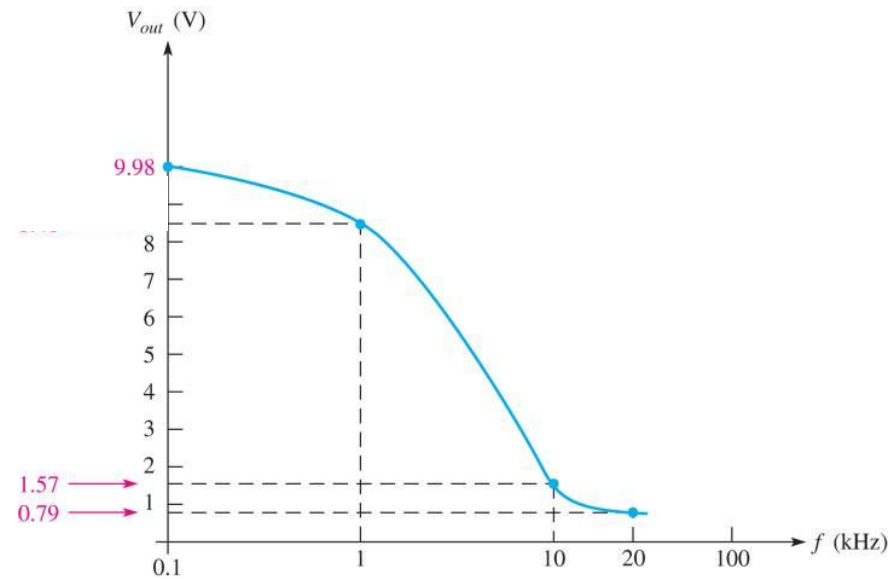
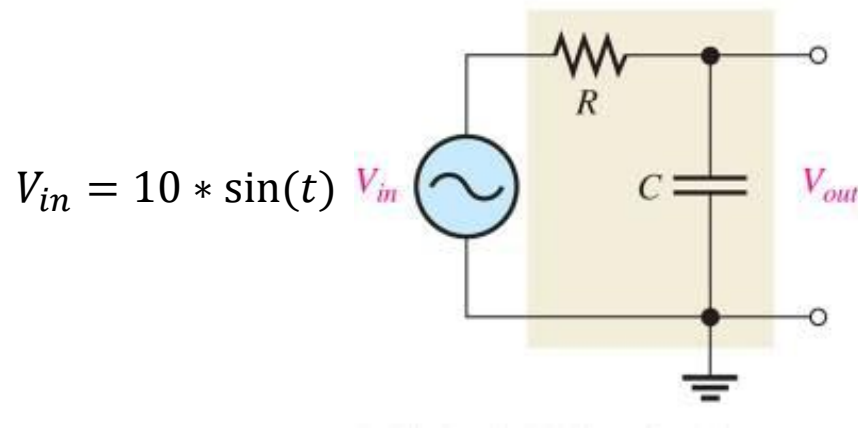
Ulike filtre og filterkarakteristikker

- Filtre kan designes på mange ulike måter
 - Filteret har ofte navn etter «oppfinneren»
 - Filterets orden angir hvor raskt filteret demper
 - Jo brattere kurve desto bedre, men oppførselen i passområdet blir da i regelen ikke perfekt (ikke flat kurve)



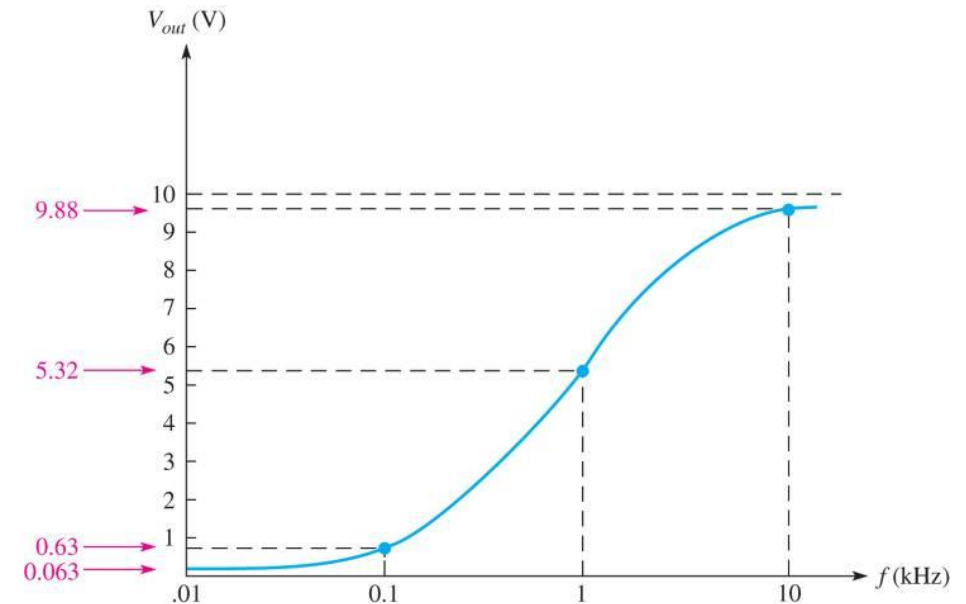
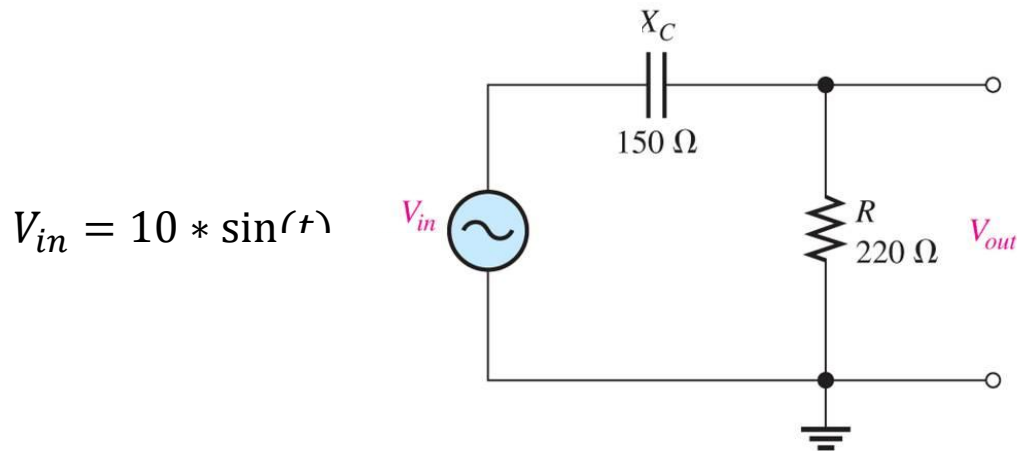
RC-krets som lavpassfilter

- En RC krets kan benyttes som et lavpassfilter eller et høypassfilter
- Lavpassfilteret slipper gjennom lave frekvenser og demper mer og mer jo høyere frekvens
 - Vi skal ikke «regne» på lavpassfiltre i IN1080, men det er forventet at dere forstår virkemåten



RC-krets som høypassfilter

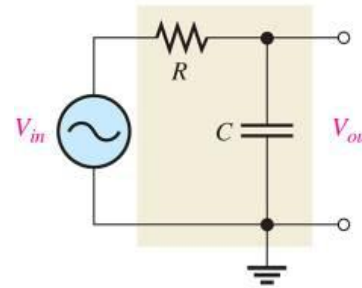
- Ved å bytte om plasseringen av resistoren og kondensatoren får vi et høypassfilter
- Høypassfilteret slipper gjennom høye frekvenser og demper mer desto lavere frekvens
 - Vi skal heller ikke «regne» på høypassfiltre i IN1080, men det er også her forventet at dere forstår virkemåten



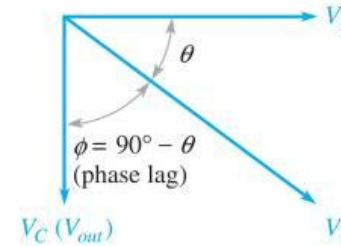
RC «lead/lag» kretser: «lag» krets

- Vi har tidligere sett at spenningene over kretselementene i en RC-krets blir forskjøvet i forhold til hverandre
- En RC-krets kan derfor også brukes som en faseskift- eller fasedreiningskrets
- I en RC «lag»-krets er utspenningen V_{out} forskjøvet ϕ grader i forhold til V_{in}
 - Legg merke til at dette er akkurat samme kretsen som et lavpassfilter
- V_{out} er lik V_C , V_{in} lik V_S og $\phi = 90^\circ - \theta$
- Kretsen kan også ses på som en spenningsdeler hvor

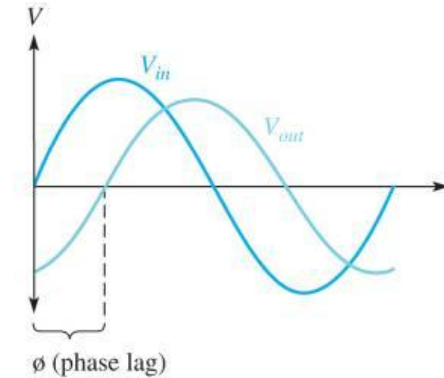
$$\phi = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right) \quad V_{out} = \left(\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}\right) V_{in}$$



(a) A basic RC lag circuit



(b) Phasor voltage diagram showing the phase lag between V_{in} and V_{out}

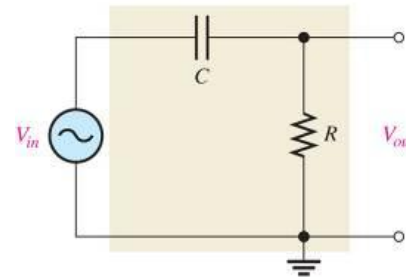


(c) Input and output voltage waveforms

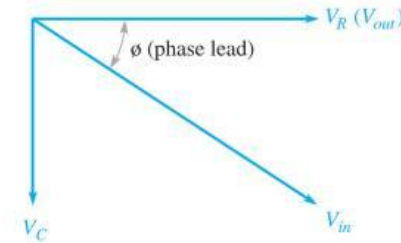
RC «lead/lag» kretser: «lead» krets

- Ved å bytte om plasseringen til R og C får vi en «lead»-krets
- I en RC «lead»-krets er utspenningen V_{out} forskjøvet $90^\circ - \phi$ grader i forhold til V_{in}
 - Legg merke til at dette er akkurat samme kretsen som et høypasspassfilter
- V_{out} er lik V_C , V_{in} lik V_S og nå er $\theta = 90^\circ - \phi$
- Kretsen kan også i dette tilfellet ses på som en spenningsdeler hvor

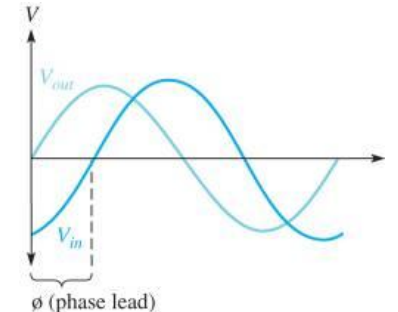
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right) \quad V_{out} = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}\right) V_{in}$$



(a) A basic RC lead circuit



(b) Phasor voltage diagram showing the phase lead between V_{in} and V_{out}



(c) Input and output voltage waveforms

Nøtt til neste gang

- Hva gjør denne kretsen? (dvs: hva er sammenhengen mellom V_{in} og V_o når bryterne åpnes og lukkes?) Anta at kondensatorene er ideelle.

