

IN 1080

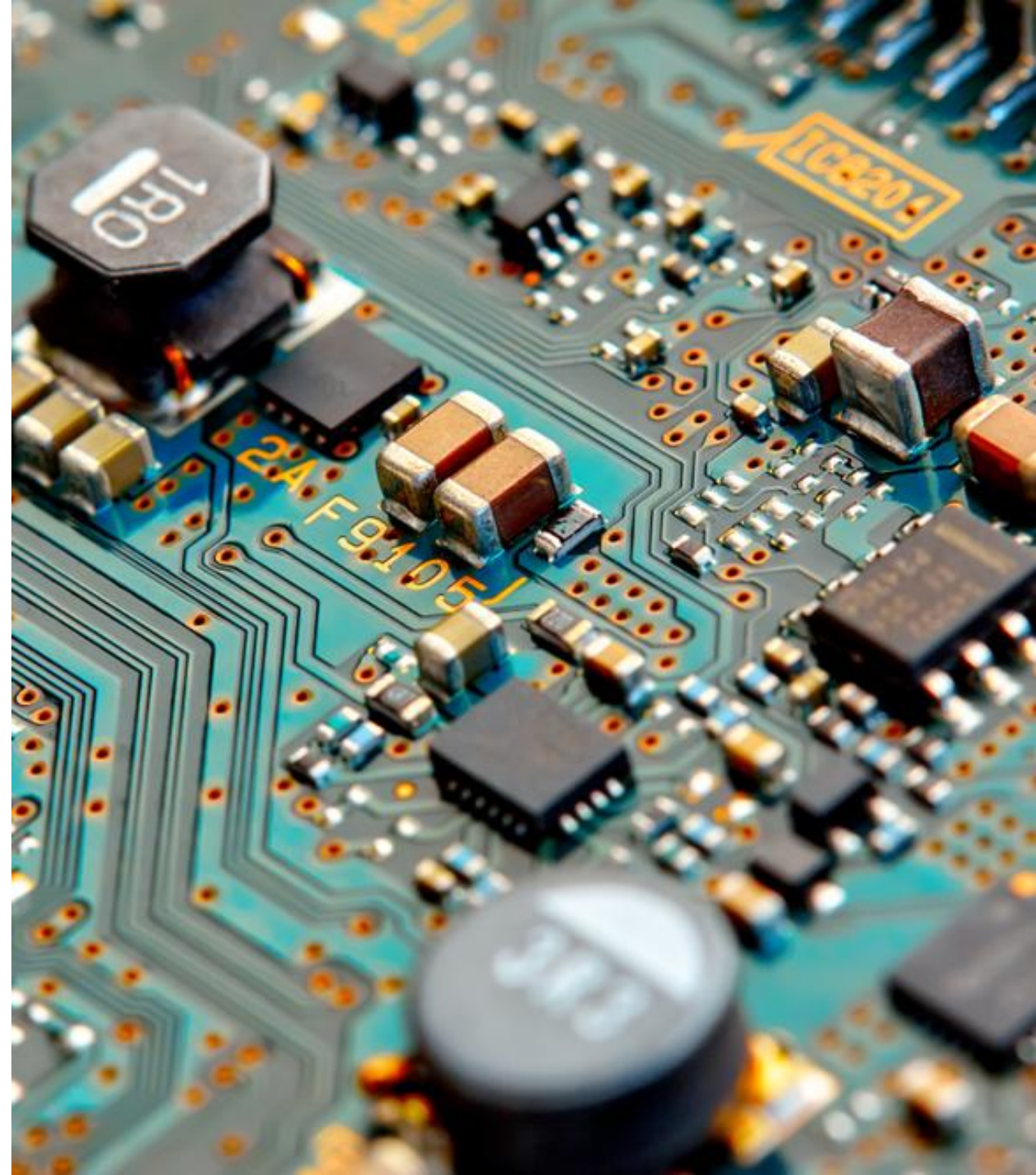
Mekatronikk

Del 1: Analog elektronikk

Forelesning 3



UNIVERSITETET
I OSLO



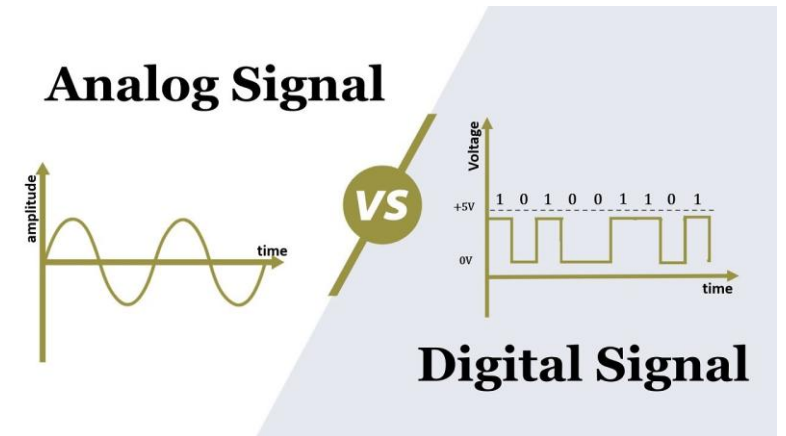
Om dagens forelesning

- I denne forelesningen skal vi se nærmere på
 - Sinusformede vekselstrømmer og –spenninger
 - Oppbygging og virkemåte til kondensatorer
 - Kapasitiv impedans (kapasitiv reaktans)
 - Analyse i tidsplanet av RC-kretser



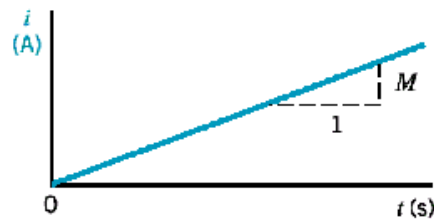
Litt terminologi

- I elektronikk er vi som regel mest interessert i hvilken *informasjon* en strøm eller spenning representerer
- Vi bruker begrepet *signal* som en fellesbetegnelse på bla strømmer og spenninger som koder informasjon
 - Vanligvis er man ikke interessert i antall volt eller ampere, men hvilken informasjon det innebærer
- Strømmer og spenninger som varierer som funksjon av tid er spesielt nyttige
 - Endringer eller variasjon koder informasjon
- Vi skal studere noen egenskaper ved signaler som kan beskrives med trigonometriske funksjoner, ofte omtalt som 'sinussignaler'
- Det finnes mange verktøy, analyseteknikker og mye matematisk teori for å beskrive og behandle sinussignaler
 - Dette forenkler arbeidet med å analysere og designe elektroniske kretser som arbeider med sinussignaler
 - Man kan også anvende de samme teknikkene og teoriene for analoge signaler på digitale signaler

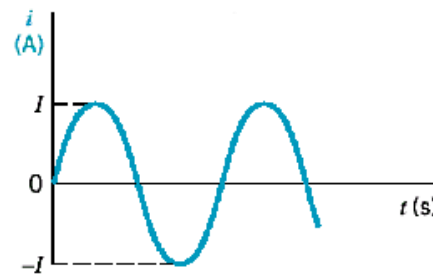


ac- og dc-signaler

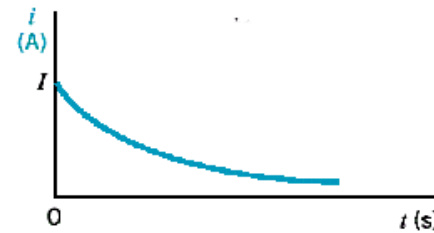
- Signaler som varierer over tid kalles ac-signaler
 - Informasjonsinnholdet kan f.eks. ligge i variasjonen som funksjon av tid
 - Variasjonen kan være
 - *periodisk* (figur (b)): formen på signalet gjentar seg med faste mellomrom
 - *ikke-periodisk* (figur (a) og (c)): formen gjentar seg ikke
- Hvis endringen er veldig langsom, kan vi betrakte et ac-signal som et dc-signal
 - Kan forenkle analysen og kretsen



(a)



(b)



(c)

Sinussignaler

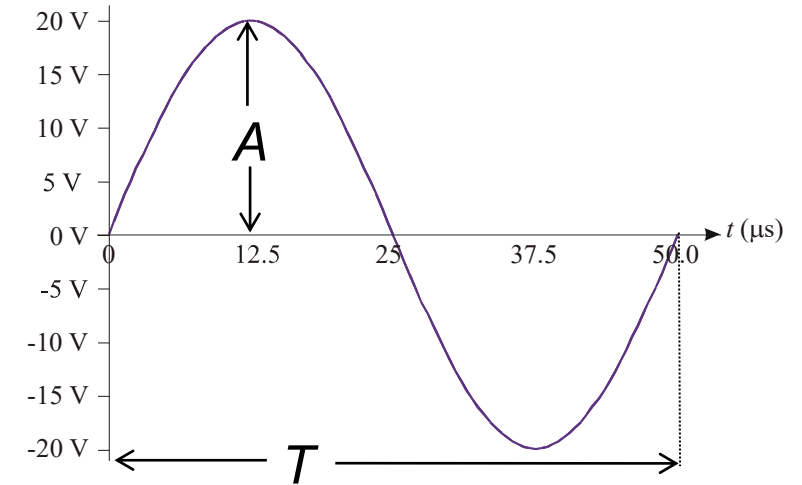
- En sinusformet bølge er ofte den mest opplagte matematiske representasjonen av hvordan mange fenomener i naturen endrer tilstand
- Mange naturlige fenomener varierer eller kan beskrives med sinus-karakteristikk



- Sinussignaler og deres egenskaper kan beskrives og behandles presist matematisk
- Vilkårige signaler kan representeres som summer av sinusformede signaler
- Sinussignaler er viktige i bla lyd- og bildebehandling
- Vi trenger i tillegg teknikker for å beskrive og analysere ac-signaler som er *eksponentielle*

Amplitude og periode

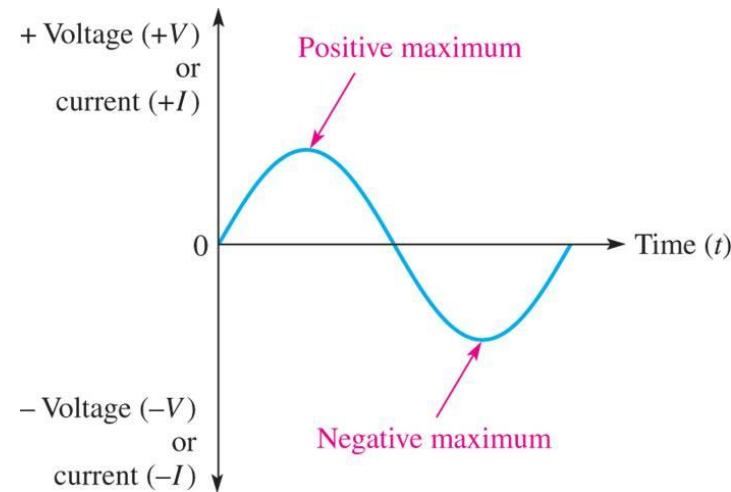
- Vi trenger noen grunnleggende definisjoner og egenskaper
 - Konsentrerer oss om sinus, ikke de andre trigonometriske funksjonene
 - Definisjonene vi gjennomgår gjelder også for cosinus-signaler
- En grunnleggende form av et sinussignal er gitt av $f(t) = A \cdot \sin(\alpha t)$
 - Skaleringsfaktoren A kalles *amplitude* og er den maksimale verdien $f(\alpha t)$ kan ha
 - α sier hvor hurtig sinussignalet gjentar seg per tidsenhet
- Dessuten
 - Perioden = hvor mange sekunder det tar for bølgeformen å gjenta seg
 - α brukes til å uttrykke sammenhengen mellom tid og periode
- **Merk:** I eksemplene og definisjonene på de neste sidene bruker vi spenning som eksempel på den avhengige variabelen ('y-aksen'). De samme definisjonene gjelder for strøm på y-aksen



$$A = 20 \text{ volt} \quad T = 50 \mu\text{s}$$

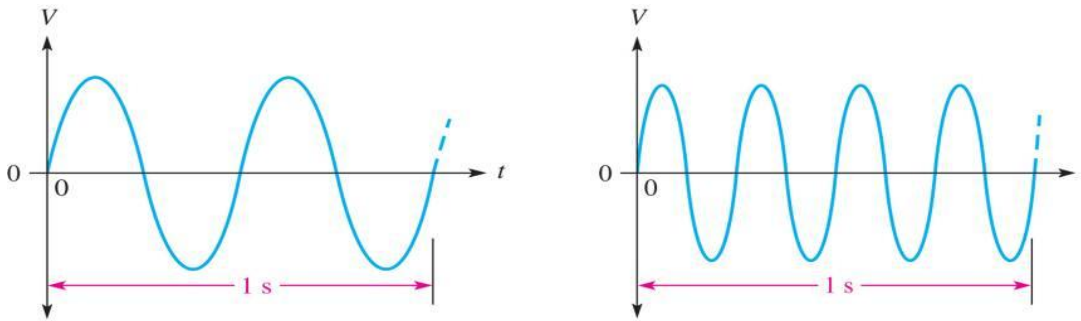
Amplitude og periode (forts)

- Et *balansert* sinussignal er sentrert rundt 0:
 - Maksimal positiv verdi = |maksimal negativ verdi|
- Amplituden er definert som den positive maksimumsverdien
- Gjennomsnittsverdien over en hel periode er lik 0 hvis signalet er balansert



Periode og frekvens

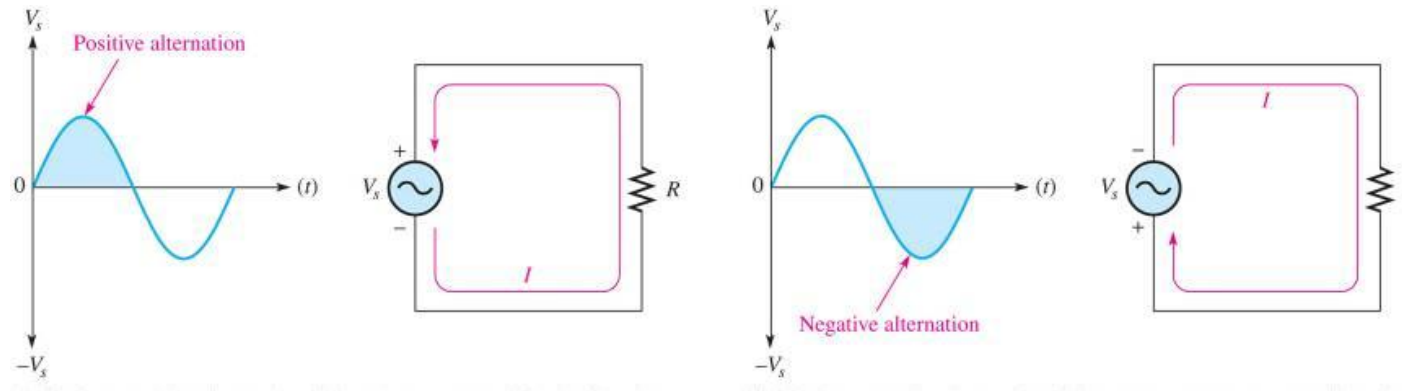
- Mens *perioden* er tiden det tar før signalformen gjentas, er *frekvensen* antallet ganger signalformen gjentar seg per sekund



- Frekvens f måles i enheten Hertz hvor $1\text{Hz} = 1/\text{s}$;
- Perioden T og frekvensen f er omvendt proporsjonale $T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{T}$
 - Kjenner vi T kan vi enkelt finne f og omvendt

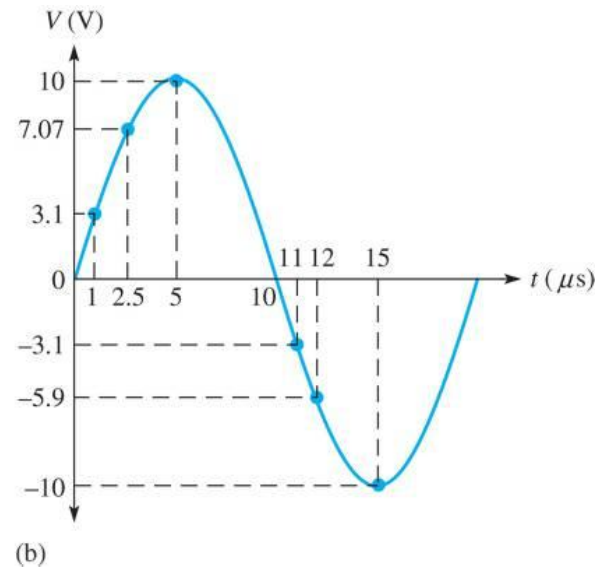
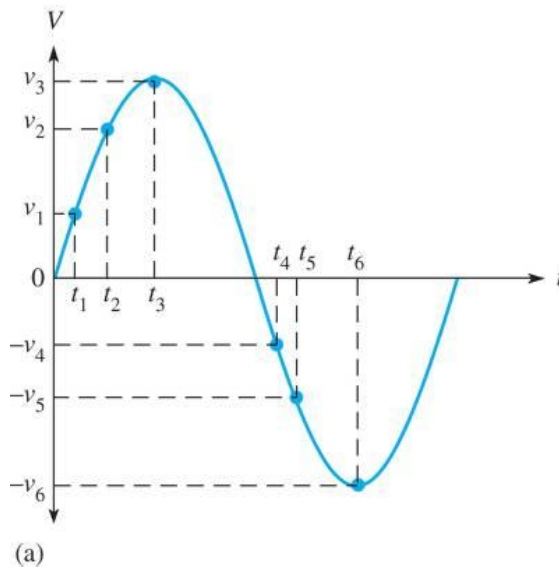
Strøm- og spenningsretning

- Hvis vi har et balansert sinussignal vil strømretningen eller polariteten til spenningen endres en gang i løpet av perioden T
 - Elektronene vil bevege seg i den ene retningen i halve perioden og deretter snu og gå i motsatt retning i den andre halvdelen av perioden



Øyeblikksverdi

- Hvis man spør «hva er verdien til et sinusformet ac-signal?» er dette ikke entydig
 - Mener vi maksimal eller minimal verdi, gjennomsnittverdi eller verdien på et bestemt tidspunkt?
- *Øyeblikksverdien* er amplituden på et bestemt tidspunkt t_i



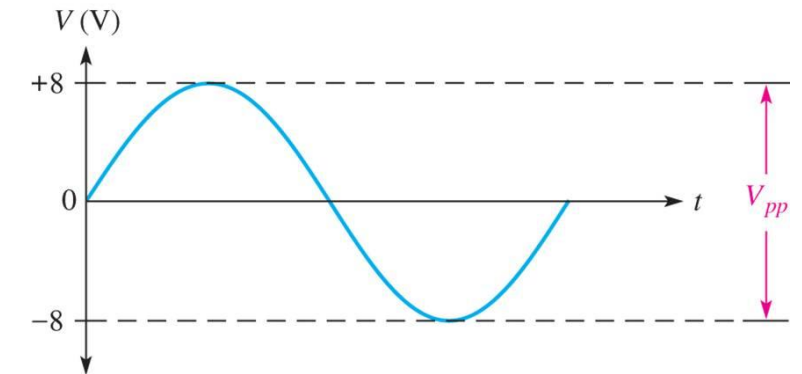
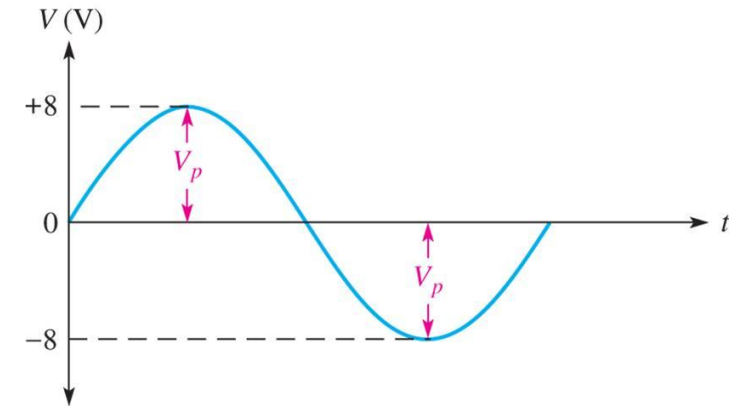
Peak-til peak

- Amplitude kalles også *magnitude* eller *peak-verdi* V_p
- *Peak-til-peak* verdien V_{p2p} til et balansert sinussignal er definert som

$$V_{p2p} = 2V_{pmax}$$

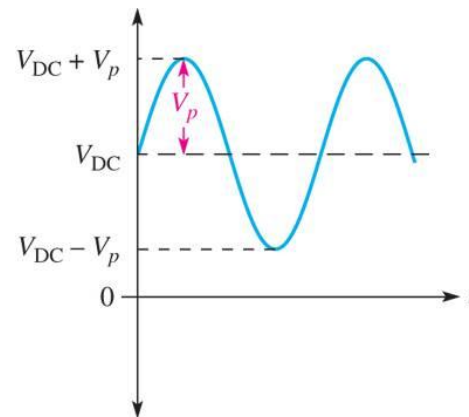
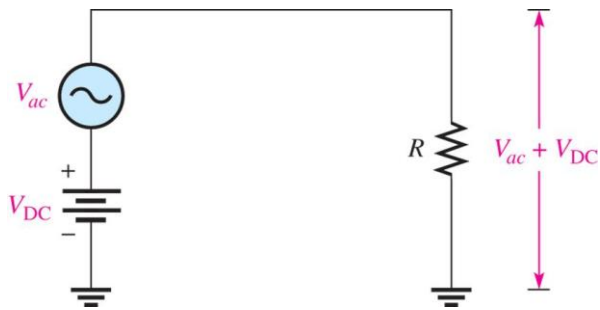
- For et ikke-balansert sinussignal er peak-til-peak verdien $V_{p2p} = |V_{pmax}| + |V_{pmin}|$

der V_{pmax} og V_{pmin} er hhv de maksimale og minimale peak-verdiene målt relativt til senterlinjen (dc-offset)

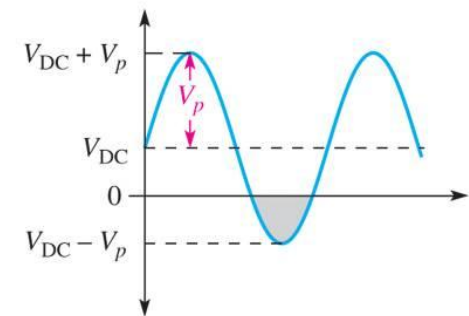


Ikke-balanserte sinussignaler: sinussignaler med offset

- Hvis et balansert sinussignal har et fast «tillegg», kalles dette et «dc-offset»
- Et dc-offset kan være enten positivt eller negativt
 - Signalet forskyves oppover eller nedover langs den vertikale akse
 - Peak-verdien og amplituden defineres relativt til dc-offset, og ikke til 0
 - Et balansert sinussignal har dc-offset = 0
 - Med et dc-offset kan et sinussignal kan være fullstendig positivt eller negativt gjennom hele perioden



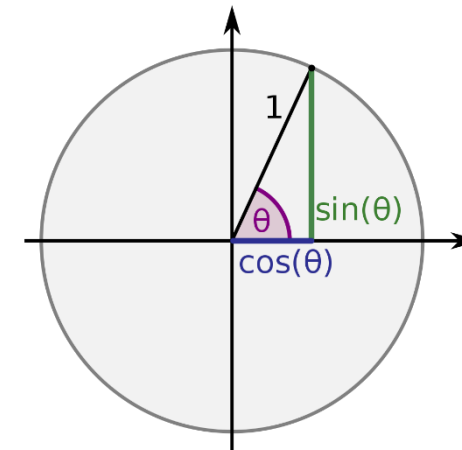
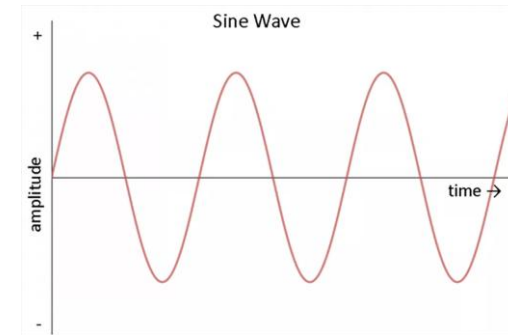
(a) $V_{DC} > V_p$. The sine wave never goes negative.



(b) $V_{DC} < V_p$. The sine wave reverses polarity during a portion of its cycle.

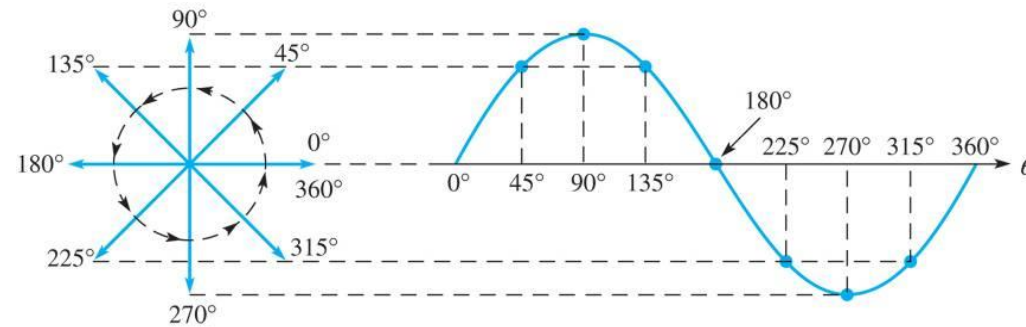
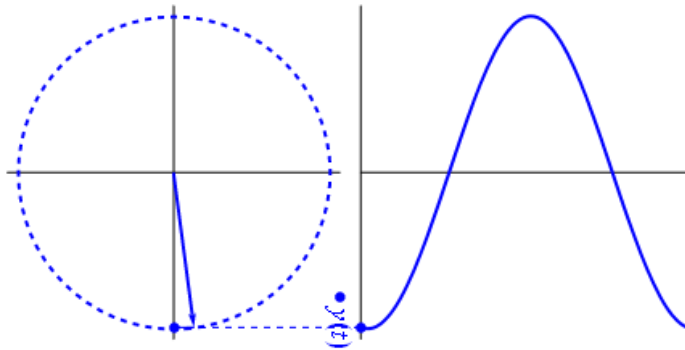
Mer om sinusfunksjonen

- Så langt har vi sett på sinus som en funksjon av tid t som uavhengig variabel (tiden t går langs den horisontale akse): $f(t) = \sin(t)$
- I elektronikk er det ofte nødvendig å benytte enten vinkel eller frekvens som argument
 - Analyse i frekvensplanet: oppførselen til en RC-krets som funksjon av endringer i frekvens
- Istedenfor t lar vi vinkelen mellom den horisontale akse og vektoren som utgjør radius være argument til sinusfunksjonen: $g(\phi) = \sin(\phi)$



Mer om sinusfunksjonen (forts)

- Istedenfor å la tiden t øke for å vise endringen over tid, kan vi la vinkelen ϕ øke, som betyr at vi roterer vektoren som utgjør hypotenusen i trekanten hvor $\sin(\phi)$ er lengden på motstående katet
- Etter en hel omdreining, dvs $\phi = 2\pi$, er vi tilbake til utgangspunktet
- Om endepunktet projiseres horisontalt på en rett linje, får man en «vanlig» sinuskurve:

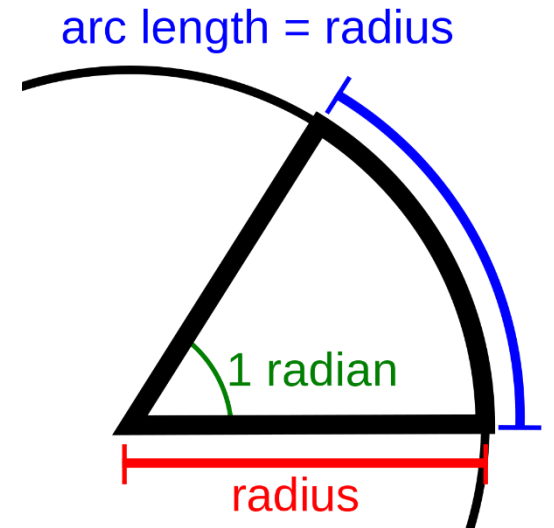


Mer om sinusfunksjonen (forts)

- *Radianer* er en egen enhet som vi bruker for å måle vinkler
- En *radian* er lengden som spissen av vektoren som roterer har tilbakelagt
- 1 radian er når spissen av vektoren har tilbakelagt en lengde som tilsvarer radius
- $1 \text{ radian} \approx 57.3^\circ$
- Sammenhengen mellom grader og radianer er $2\pi \text{ rad} = 360^\circ \leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) * \text{grader}$
- *Vinkelhastighet* ("angular velocity") sier hvor hurtig vektoren roterer rundt enhetssirkelen:

$$\text{vinkelhastighet} = \frac{\text{avstand (målt i grader eller radianer)}}{\text{tid (målt i sekunder)}} \leftrightarrow \omega = \frac{\alpha}{t}$$

- Vinkelhastigheten som behøves for å fullføre en hel periode er gitt av $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
 - Høyere frekvens f betyr høyere ω
- ω kalles som regel *vinkelfrekvens*
 - ..og sjeldnere vinkelhastighet



Mer om sinusfunksjonen (forts)

- Sinusformede strømmer og spenninger kan nå skrives som

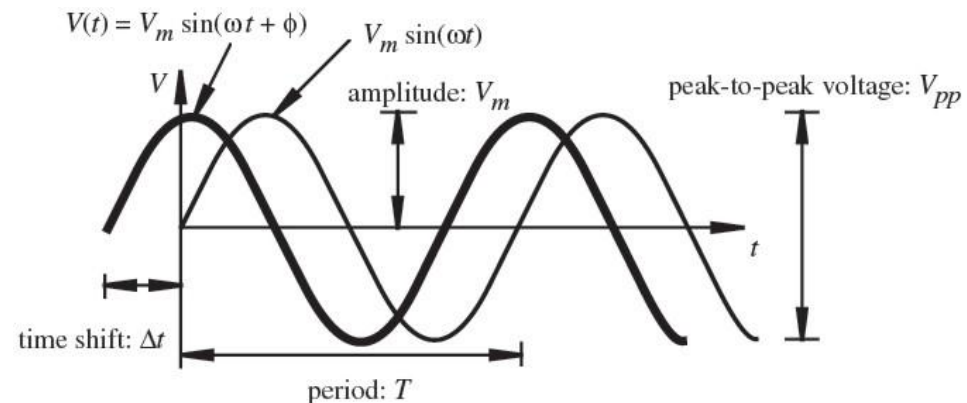
$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

- Vi må ta hensyn til at sinuskurven ikke alltid starter i (0,0)
 - Forskyves kurven horisontalt (mot venstre eller høyre) kalles dette *faseskift* eller *fasedreining*
 - Fasedreiningen angis ved å legge til en vinkel ϕ
- Fasedreining er viktig når vi skal beskrive oppførselen til kondensatorer

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

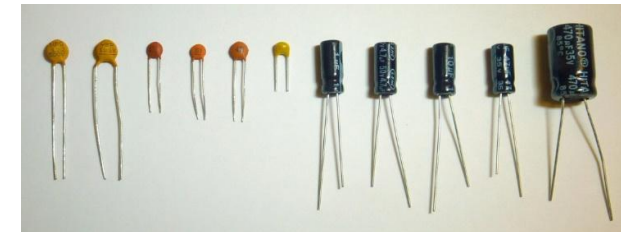
$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$



Positiv ϕ flytter kurven mot venstre

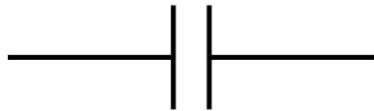
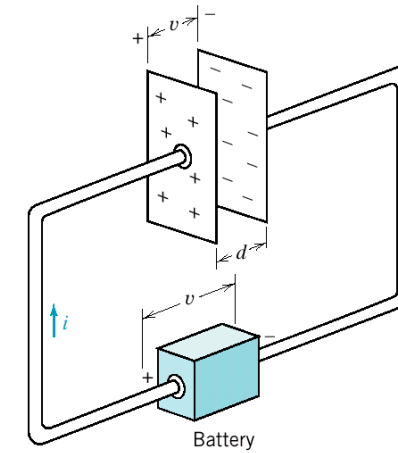
Kondensatorer

- Kondensatorer er viktige i elektronikk og har mange bruksområder
 - Utglatting av signaler som endrer seg hurtig
 - Blokkering av signaler med bestemte frekvenser
 - Omvandling av likestrøm til vekselstrøm – og omvendt (dc-ac og ac-dc omformere)
 - Spenningsregulatorer, batterier etc
 - Beskyttelse mot høye og kortvarige spenningspulser
- Impedansen til **resistorer** er UAVHENGIG av frekvensen til strømmen som går gjennom dem
 - Resistans er frekvensuavhengig
- Impedansen til **kondensatorer** ENDRER seg med frekvensen til strømmen
 - Høyere frekvens gir lavere impedans
 - Ved ac har kondensatorer uendelig stor impedans

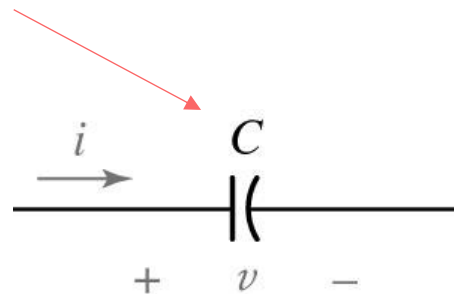


Kondensatorer (forts)

- En kondensator kan holde på eller lagre elektroner
- En kondensator består av to plater av ledende materiale med isolasjon i mellom
 - Isolasjonen kalles «dielektrikum»
- Kondensatorer kan lages av ulike materialer
- Noen kondensatorer har «+» og «-» terminal; disse kan eksplodere hvis de kobles feil!



Generelt symbol for kondensator



Symbol for polarisert kondensator



Kondensatorer (forts)

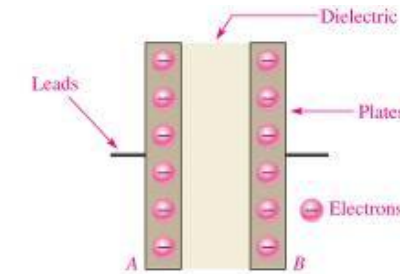
- En kondensator kan sammenlignes med et vannrør med en elastisk membran



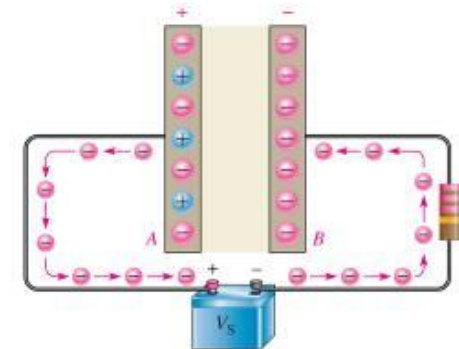
- Hvis vannet beveger seg, vil membranen også bevege seg (et stykke), slik det ser ut som det renner vann igjennom røret (vann i bevegelse = elektrisk strøm, vanntrykk = elektrisk spenning)
- Hvis vannet endrer retning, vil membranen gå tilbake til sin opprinnelige posisjon og presse vannet tilbake motsatt vei
- Det vil være trykkforskjell på hver side av membranen når vannet beveger seg (trykkforskjell = endring spenning)
- Uten bevegelse i vannet vil membranen ikke bevege seg (dc-spenning gir ingen strøm gjennom kondensatoren)

Kondensatorer (forts)

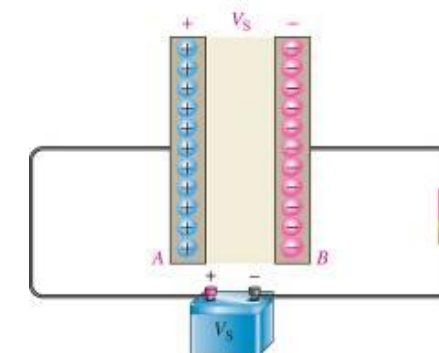
- Hvis platene i en kondensator kobles til en spenning V_s oppstår et elektrisk felt mellom platene
- Feltet gjør at elektroner beveger seg fra den ene platen over til den andre gjennom resten kretsen
 - De beveger seg IKKE direkte fra den ene platen til den andre
- Strømmen er størst til å begynne med og blir gradvis mindre ned til 0
 - Elektronene vil bevege seg hurtigst til å begynne med
 - Antall frie elektroner som kan bevege seg fra '+' siden er størst til å begynne med og avtar med tiden
 - Etter hvert som det blir opphopning av elektroner på '-' vil det bli færre «ledige» plasser til nye elektroner
- Når spenningen mellom platene har nådd V_s vil ikke lenger elektroner bevege seg
 - Det er nå underskudd av elektroner på kondensatorplaten koblet til batteriets '+' pol og overskudd av elektroner på platen koblet til batteriets '-' pol
 - Underskudd av elektroner = positiv total ladning
 - Overskudd av elektroner = negativ total ladning



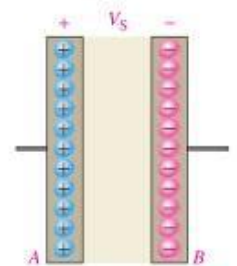
(a) Neutral (uncharged) capacitor (same charge on both plates)



(b) When connected to a voltage source, electrons flow from plate A to plate B as the capacitor charges.



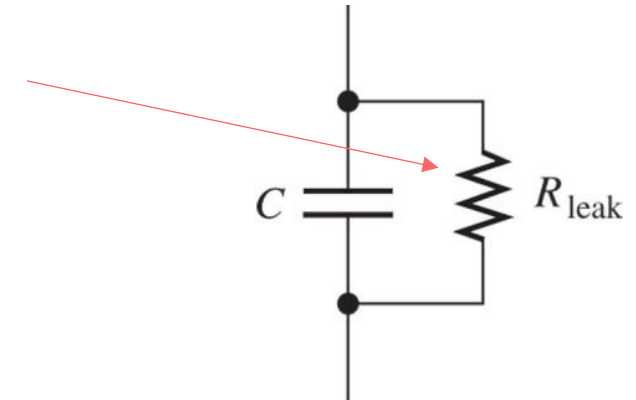
(c) After the capacitor charges to V_s , no electrons flow.



(d) Ideally, the capacitor retains charge when disconnected from the voltage source.

Kondensatorer (forts)

- Hvis spenningskilden fjernes, vil en *ideell* kondensator holde på ladningene beholde til evig tid og spenningen mellom platene forblir konstant
- I en *fysisk* kondensator derimot klarer ikke platene å holde på elektronene slik at kondensatoren etterhvert utlades og spenningsforskjellen blir lavere
- Denne effekten kan modelleres med en resistor i parallell, som kalles en *parasittresistans*
 - I en ideell kondensator har R_{leak} uendelig høy resistansverdi
 - R_{leak} er ikke en fysisk resistor koblet i parallell, men en verdi som sier noe om hvor mange elektroner som gjennom dielektrikumet
- Ved høye frekvenser ($\sim 10^9$ Hertz) blir oppførselen til en kondensator mer komplisert
 - Det dukker opp flere andre typer parasittresistanser og -induktanser



Kondensatorer (forts)

- En kondensators evne til å lagre ladninger kalles *kapasitans* C , som måles i *Farad* og er definert ved

$$C = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow Q = CV \Leftrightarrow V = \frac{Q}{C}$$

- 1 Farad er lagring av 1 Coulomb med 1 volt potensialforskjell mellom platene
- Kapasitansen bestemmes av platearealet A , avstanden d mellom platene og permittiviteten ε :

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

- ε er en egenskap ved materialet mellom platene (altså dielektrikumet) og måles i Farad/meter
- **Merk:** Kapasitans C er IKKE et mål for motstand mot strøm, men evnen til å lagre ladninger
- Kondensatorens motstand mot elektrisk strøm kalles *kapasitiv impedans*, *kapasitiv reaktans* eller bare *reaktans*

Sammenheng strøm, spenning og kapazitiv impedans

- Sammenhengen mellom strømmen gjennom og spenningen over en kondensator er gitt av

$$V = \frac{Q}{C} \wedge i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} \Rightarrow i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

- Impedansen til en kondensator er gitt av formelen

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

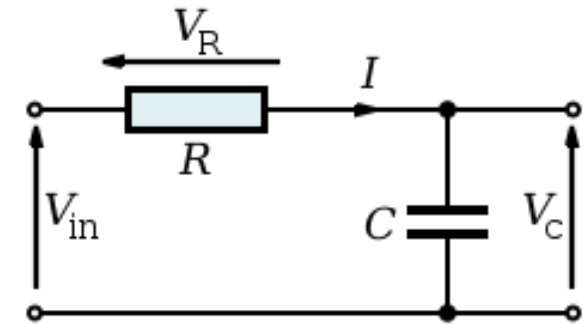
- En sinusformet strøm og –spenning gjennom/i en kondensator ikke er i fase, men *forskjøvet* i tid i forhold til hverandre

Oppsummering kondensatorens virkemåte

- Dere finner en animasjon som forklarer kondensatorens virkemåte her:
<https://www.youtube.com/watch?v=u-jigaMJT10>
- Viktige punkter :
 - Elektronene “**trekkes**” fra kondensatorens ene plate mot den positive terminalen på batteriet
 - Elektronene “**skyves**” fra den negative terminalen på batteriet mot kondensatorens andre plate
 - Etterhvert blir det så mange negative ladninger på $-$ siden at elektronene beveger seg langsommere mot kondensatorens $-$ plate og til slutt stopper elektronstrømmen
 - Tilsvarende blir det overskudd av positive landinger på $+$ siden av kondensatoren slik at elektronene beveger seg langsommere mot batteriet
 - Kondensatorer lades hurtig opp til å begynne med og deretter langsommere og langsommere
 - Samme for utladning: Først hurtig og deretter langsommere og langsommere

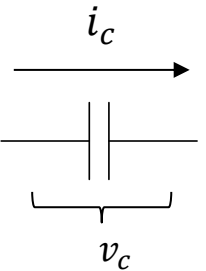
RC-kretser

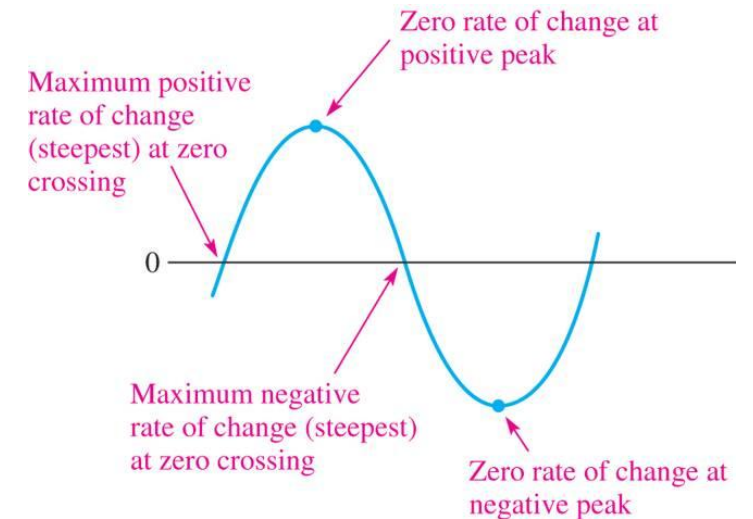
- En RC-krets er en krets består av minst én resistor og én kondensator
 - Analyseres både med og uten spenningskilde(r)
 - Resistoren og kondensatoren kan være koblet i serie eller i parallell
 - Enklest å analysere krets hvor kondensator og resistor er koblet i serie
 - Skal ikke analysere parallellkoblede RC-kretser
- Skal analysere oppførselen for to ulike typer innsignal:
 - Sinusformet
 - Pulsformet (firkantpulser)
- Typen innsignal viser ulike egenskaper ved RC-kretsen
 - Innsignalet kan komme fra en spenningskilde eller fra en annen del av kretsen



Sammenheng strøm og spenning i en kondensator

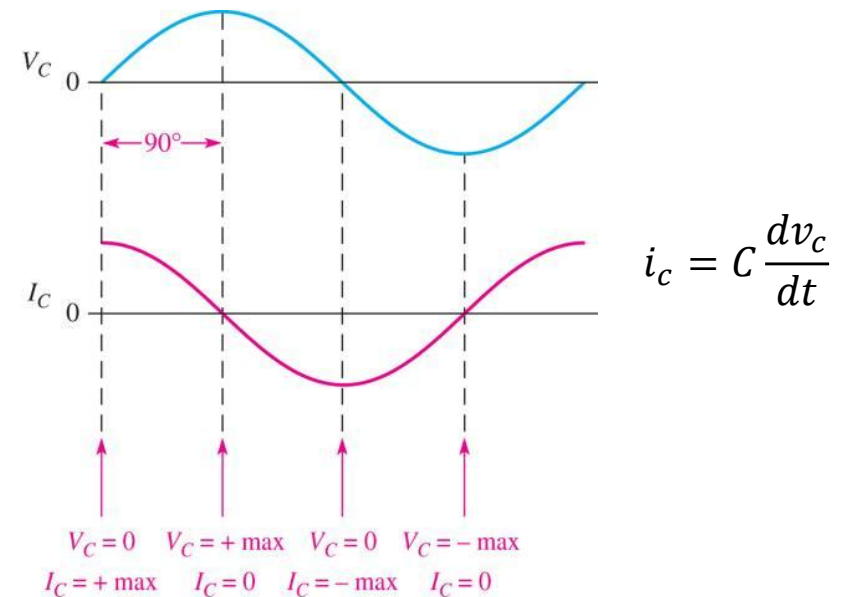
- Antar at vi har en kilde som genererer en sinusformet spenning
- **Resistor:** Ingen faseforskyvning mellom strøm og spenning, dvs $\varphi = 0$
 - Maksimal spenningsforskjell gir maksimal strøm
 - Null spenningsforskjell gir null strøm
- **Kondensator:** Spenning og strøm er faseforskjøvet, dvs $\varphi \neq 0$
 - Maksimal spenningsforskjell gir ikke maksimal strøm
 - Null spenningsforskjell gir ikke null strøm
- Fasedreiningen mellom strøm og spenning kan forstås ved å observere når *endringen* langs en sinus-kurve er *størst* og når den er *minst*
- **Husk:** Faseforskyvning = fasedreining = faseforskjell


$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$



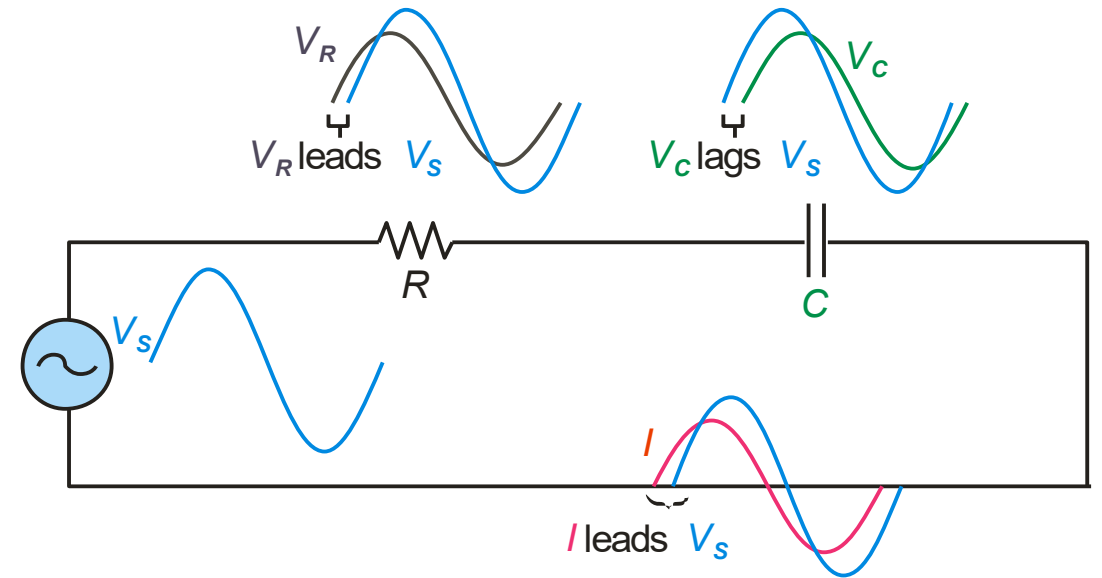
Sammenheng strøm og spenning i en kondensator (forts)

- Strømmen gjennom en kondensator er størst når *endringen* i spenningen over den er størst, og minst når *endringen* i spenningen er minst
- Når spenningsforskjellen er på det mest positive (eller mest negative) er *endringen* lik 0, dvs strømmen lik 0
- Når spenningsforskjellen er 0, er *endringen* størst, dvs strømmen er størst
- Vi sier at i_c leder over v_c med 90° ($\pi/2$)
 - Dermed ligger v_c bak i_c med 90° ($\pi/2$)



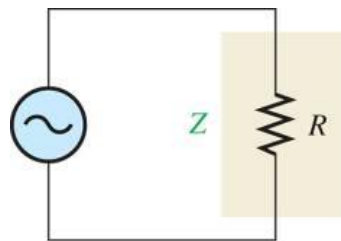
Sammenheng strøm-spenning i seriell RC-krets

- Spenningen V_R over motstanden R er i fase med strømmen I , og leder over V_S , dvs $\phi > 0$
- V_R og V_C har 90° fasedreining
- For å finne
 - 1) fasedreiningen mellom V_S og V_C
 - 2) fasedreining mellom V_S og Imå vi beregne den samlede *totale* impedansen
- KVL, KCL og Ohms lov gjelder fortsatt
 - Men formlene må modifiseres for å ta hensyn til at impedansen endrer seg med frekvensen

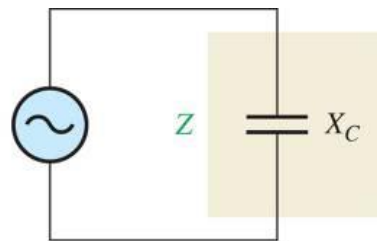


Total impedans i seriell RC-krets

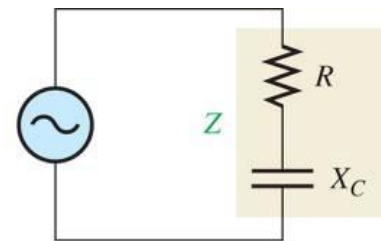
- For å finne strøm/spenning gjennom/over elementene i en seriell RC-krets, må vi først beregne den totale frekvensavhengige impedansen
- $\mathbf{Z}$ betegner den samlede impedansen mot vekselstrøm i en krets
 - $\mathbf{Z}$ består av en frekvensuavhengig *resistiv* del $\mathbf{R}$ og en frekvensavhengig *reaktiv* del $\mathbf{X_C}$ (kapasitiv reaktans)
 - $\mathbf{Z}$ måles i Ohm



(a) $Z = R$



(b) $Z = X_C$

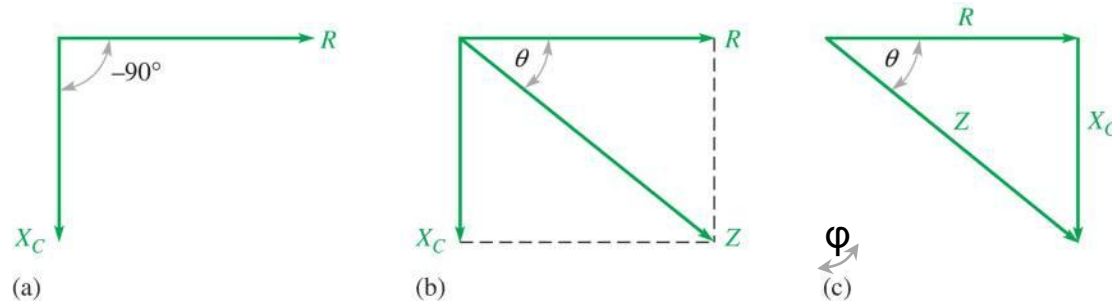


(c) Z includes both R and X_C

- Den resistive og reaktive delen har en fasedreining på -90° i forhold til hverandre
- Hvis vi kun har likespenning/likestrøm, er $f = 0\text{Hz}$ og da blir $\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, altså et spesialtilfelle

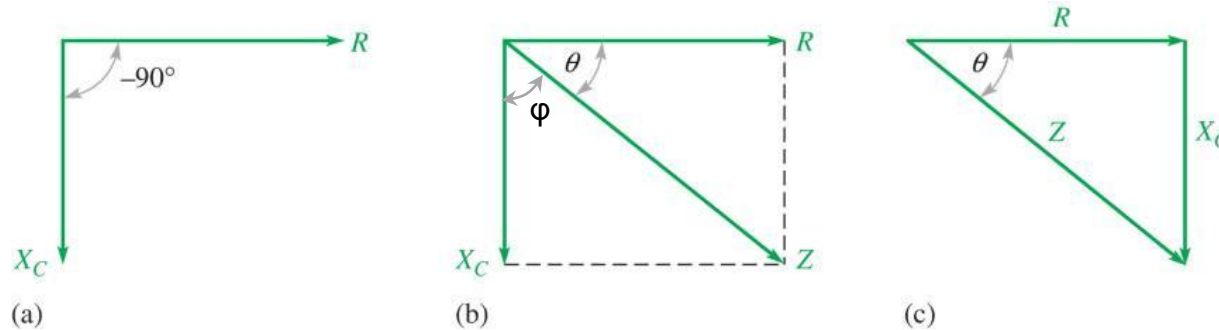
Total impedans i seriell RC-krets (forts)

- Den totale impedansen er nå gitt av *formelen* $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + \mathbf{X}_C$ der $\mathbf{R}$ og $\mathbf{X}_C$ er vektorer («phasors»).
- $\mathbf{Z}$ finner man ved å summere vektorene $\mathbf{R}$ og $\mathbf{X}_C$



- $\mathbf{Z}$ har en fasevinkel θ i forhold $\mathbf{R}$ og $\phi = 90^\circ - \theta$ i forhold til $\mathbf{X}_C$
- $|\mathbf{Z}|$ måles i Ohm (Ω)
 - Når vi beregner $|\mathbf{Z}|$ må vi angi for hvilken frekvens Ohm-verdien gjelder, siden den vil variere som funksjon av frekvens

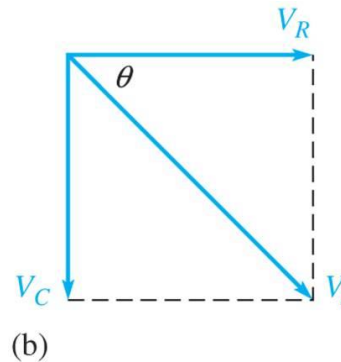
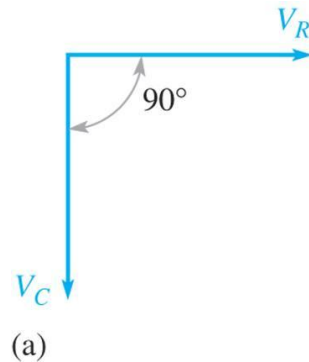
Total impedans i seriell RC-krets (forts)



- Lengden til **Z** (magnituden) finnes ved Pythagoras: $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$
- Fasedreiningen θ mellom **R** og **Z** er gitt av $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$
- Fasedreiningen φ mellom **X_C** og **Z** er gitt av $\varphi = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$
 - Vi kan ved hjelp av disse formlene beregne faseforskjellen mellom strøm-spenning og mellom spenningene over elementene i en seriell RC-krets

Faseforskjell mellom strøm og spenning i en RC-krets

- Husk: I en seriell krets er det samme strømmen gjennom alle elementene
 - I en seriell RC-krets er derfor strømmene gjennom resistoren og kondensatoren like store og i fase
- For å finne sammenhengen mellom $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_R$ og $\mathbf{V}_C$ bruker vi KVL (Kirchhoffs spenningslov) og vektoraddisjon (samme formel som for å finne $\mathbf{Z}$)

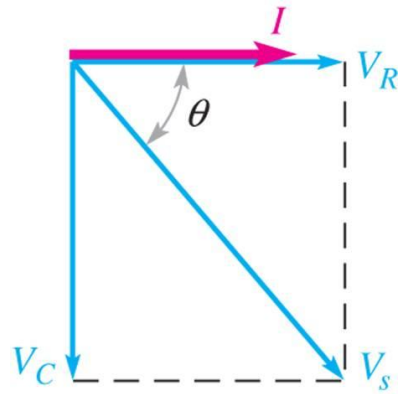


$$|V_s| = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

Faseforskjell strøm - spenning (forts)

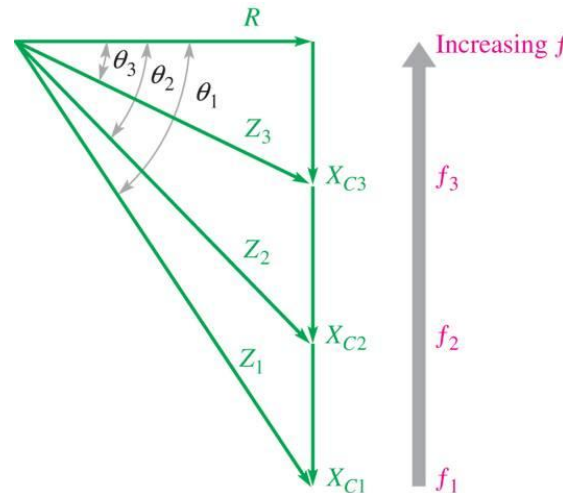
- Siden strømmen I og resistorspenning V_R er i fase, er fase-dreiningen mellom I og V_S lik fasedreiningen mellom V_R og V_S



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

Impedans, fasedreining og frekvens

- Jo større kapasitiv reaktans X_c målt i forhold til R , desto større fasedreining mellom strøm og spenning
- Når frekvensen synker blir fasedreiningen mindre



$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

Kapasitiv reaktans - oppsummering

- En kondensator har en motstand mot elektrisk strøm som er avhengig av frekvensen til spenningen/strømmen
- Denne motstanden kalles *kapasitiv reaktans* X_c (kapasitiv impedans) og er definert ved

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

- Fra denne formelen ser vi at
 - Jo større frekvens, desto lavere kapasitiv reaktans
 - Jo større kapasitans, desto lavere kapasitiv reaktans
- **Husk:** X_c er impedans og tilsvarer resistansen R i resistorer, mens kapasitansen C sier hvor mye ladning en kondensator kan lagre
 - Ikke bland X_c og C i formler!

Nøtt til neste gang

Hva er dette?

