IN1150 – Logiske metoder / høsten 2022 / oppgaver til kapittel 12

Oppgave 1. La S være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. Bevis ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

Oppgave 2. Vi vil i denne oppgaven se på en funksjon som regner ut «tverrsummen» av en bitstreng, det vil si som returnerer antall forekomster av $\mathtt{1}$ i en bitstreng. (Dette er ikke den samme funksjonen som defineres i læreboken.) For eksempel har vi at $f(\mathtt{110011}) = 4$ og $f(\mathtt{000}) = 0$. Vi velger å definere f rekursivt ved å si at $f(\mathtt{0}) = 0$, $f(\mathtt{1}) = 1$, $f(s\mathtt{0}) = f(s)$ og $f(s\mathtt{1}) = f(s) + 1$, for en bitstreng s. (Legg merke til at det er forskjell på *tegnet* $\mathtt{0}$ og *tallet* 0, men du kan godt bruke det samme symbolet i din besvarelse. Det samme for $\mathtt{1}$ og 1.) Bevis ved strukturell induksjon at f regner ut tverrsummen til en bitstreng, det vil si at den fungerer som den skal.

Oppgave 3. La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg \textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \wedge G)) &= (\textsc{flip}(G) \wedge \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \vee G)) &= (\textsc{flip}(G) \vee \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på F og G.)

Regn ut $\textsc{flip}(P \vee \neg Q)$ og $\textsc{flip}(P \to (Q \to R))$. Vis alle stegene i utregningen. (Her er P, Q og R utsagnsvariabler.)

Oppgave 4. Bruk definisjonen av FLIP i forrige oppgave. Bevis ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er *ekvivalent* med F, for alle utsagnslogiske formler F. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.