Repitisjon 2

mandag 4. mai 2020 11:59

Det er fint om dere har boken tilgjengelig.

Merk! Notatene er ikke ment til å bli brukt for seg selv, men i kombinasjon av Zoom gruppetime.

5.12 Påstand:

a) Hvis F er falsifiserbar og G er falsifiserbar, så er $F \vee G$ falsifiserbar.

Universell påstand / Eksistenspåstand

Bevise eksistens: Eksempel (Det finnes)

Motvise eksistenspåstand: Universelt/bevis (For alle ikke)

Universell påstand: Generelt bevis (For alle)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

U. Påstand: $f(x)$ er alltid positiv

Eksistenspåstand: Noen x-er gir $f(x) > 100$

Motvise Universell påstand: Moteksempel (ikke for alle)

Eksempler er også gode til å øke forståelse, men ikke tilstrekkelig for å vise universelle påstander.

men ikke tilfredsstillbar for å være universelle påstander.

a) Prøv det enkleste først, dvs moteksempel.

F: falsifiserbar $\quad$ F : P

G: falsifiserbar $\quad$ G : $\neg P$

F∨G : Gyldig.

$P \vee \neg P$ $\quad$ Dvs usann.

b) Hvis F er gyldig, og G er falsifiserbar, er F→G falsifiserbar.

F : Gyldig

G: Falsifiserbar

F→G : Falsifiserbar, fordi det finnes en valuasjon som gjør G usann og F sann, da blir F→G usann, så F→G er falsifiserbar

1 0 0

usann

Sann

c) Hvis F→H er gyldig, er F→(G→H) gyldig. $\quad$ Prøve å lage denne usann:

gyldig.

1.

F → H

1 1 1
0 1 1
0 1 0

1 0 0

Prøve å lage denne usann:

2.

F → (G → H)

1 0 1 0 0
0 1 0

Sann. Dersom F → (G → H) skal være usann, må F være sann og H usann, men det strider med antagelsen.

Eventuelt: Se på alle valuasjoner.

d) Hvis F → H er falsifiserbar, er F → (G → H) falsifiserbar.

Prøve å konstruere et moteksempel:

F → H

1 0 0

Prøve å lage denne gyldig

F → (G → H)

0 1
1 0 1 0
1 0 1

La G være en motsigelse.

Da er F → (G → H) gyldig, så påstanden er usann.

(8.4) a) Hvis $A \subseteq B$ er sant, er da $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

"Recall"
$M = \{1, a\}$, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{1,a\}\}$

Lurt å prøve å finne moteksempel først.

Bevis: Hvis A, så B

$A \Rightarrow B$

Antar A, logiske argumenter oss frem til B.

Vise at $X \subset Y$. Antar vi $x \in X$, og viser at $x \in Y$.

Anta $A \subseteq B$. Vi skal vise at $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

La $a \in \mathcal{P}(A)$. Skal vise at $a \in \mathcal{P}(B)$.

Da er $a \subseteq A \overset{(\subseteq B)}{.}$ Per antagelse er da $a \subseteq B$, da er $a \in \mathcal{P}(B)$, som var det vi skulle vise.

b) Hvis $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, er $A \subseteq B$.

$\overline{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{B}$

Bevis: Anta $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Vi skal vise at $A \subseteq B$, dvs hvis $x \in A$, så er $x \in B$.

[illegible] Da [illegible] $\{x\} \subseteq A$ [illegible]

La $x \in A$. Da er $\{x\} \subseteq A$, så $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Per antagelse er da $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, siden $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
Da er $\{x\} \subseteq B$, $x \in B$. Som var det vi skulle vise.

9.12

a) Basismengden: $\{3\}$
Induksjonssteg: Hvis x er med, så er $2x-1$ med

$2 \cdot 3 - 1 = 5$

$\{3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, \ldots\}$

b) BM: $\{1\}$
IS: Hvis x er med, er $2x$ med og $2x+1$ med

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$

e) BM: $\{\emptyset\}$
IS: Hvis X er med, så $\{X\}$ med.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$

f) BM: $\{1, a, b\}$
IS: Hvis x er med, er axa med

f) B/M: $\{\Lambda, a, b\}$

IS: Hvis x er med, er axa med og bxb med.

Λ: $a\Lambda a = aa$
$b\Lambda b = bb$

$\{\Lambda, a, b, aa, bb, aaa, bab, aba, bbb,$

$aaaa, baab, \ldots \}$

a: aaa
bab

10.8 La A og B være alfabeter. Definer par som tar to argumenter, en liste over A og en liste over B. Funksjonen gir en liste med tupler, der hvert tuppel er par fra elementer i listen.

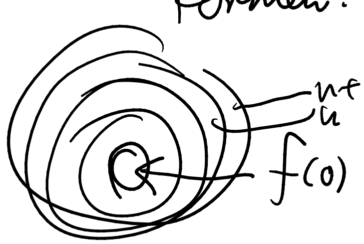
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$$\mathrm{par}((3\,2\,1), (a\,b\,c)) = (\langle 3, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 1, c\rangle)$$

Definer par rekursivt

Formen: $f(0) = a$ (Basissteg)

$f(n+1) = f(n) \ldots$



Basissteg: $\mathrm{par}((), ()) = ()$

Induksjonssteg: "$n+1 : f(n)$"

Induksjonsteg: $\quad n+1 : f(n)$

$n : L$ (liste)

$n+1 : a :: L$ (liste med et element a til)

N er liste over A, og M er liste over B

$a \in A, b \in B$

$$\underbrace{\mathrm{par}(a :: N, b :: M)}_{\text{"}(n+1)\text{"}} = \langle a, b \rangle :: \mathrm{par}(\underbrace{N, M}_{n})$$

$$\mathrm{par}((3\,2\,1), (a\,b\,c)) = \mathrm{par}(3 :: (2\,1), a :: (b\,c))$$

$$= \langle 3, a \rangle :: \mathrm{par}((2\,1), (b\,c))\;?$$

$$= \langle 3, a \rangle :: \mathrm{par}(2 :: (1), b :: (c))$$

$$= \langle 3, a \rangle :: (\langle 2, b \rangle :: \mathrm{par}(1, c))$$

$$= \langle 3, a \rangle :: (\langle 2, b \rangle :: \mathrm{par}(1 :: (), c :: ()))$$

$$= \langle 3, a \rangle :: (\langle 2, b \rangle :: \langle 1, c \rangle :: \underbrace{\overset{\text{Basissteg}}{\mathrm{par}((), ())}}_{= ()})$$

$$= (\langle 3, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 1, c \rangle).$$

(litt mange symboler).

b) $\text{Første}((\langle a, 1 \rangle)) = (a)$

$\text{Første}((\langle a,1\rangle , \langle b,2\rangle)) = (a,b)$

Basissteg: $\text{Første}(()) = ()$

Rekursivt steg: $\text{Første}(\langle a,b\rangle :: L)$ "n+1"

$= a :: \text{Første}(L)$ "n"

Sei boka.

Basissteg: $\text{Andre}(()) = ()$

Induksjonssteg: $\text{Andre}(\langle a,b\rangle :: L)$

$= b :: \text{Andre}(L)$

L: liste med tupler $\langle a,b\rangle$, der $a \in A$, $b \in B$.

Naturlig deduksjon

· Syntaktiske regler

$$\frac{A \quad B}{A \land B}\land I \qquad \frac{G \land F}{F}\land E \qquad \frac{G}{G \lor F}\lor I$$

24.10 a) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$$\dfrac{\dfrac{[Q]^2 \quad [P]^1}{Q \to P}\to I^2}{\boxed{P \to (Q \to P)}}\to I^1$$

24.6 d) $(P\land(Q\lor R)) \to (P\land Q)\lor(P\land R)$

Tips: (1) Både jobbe ovenfra og ned, og nedenfra og opp.

(2) Anta det samme mange ganger.

$$\dfrac{\overset{Q\lor R}{F \lor G} \quad \dfrac{\overset{Q}{[F]}}{\overset{P\land R}{H}} \quad \dfrac{\overset{R}{[G]}}{\overset{P\land R}{H}}}{H}\lor E$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land(Q\lor R)]^1}{P}\land E \quad [\boxed{Q}]^2}{P\land Q}\land I}{(P\land Q)\lor(P\land R)}\lor I \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land(Q\lor R)]}{P}\land E \quad [\boxed{R}]^2}{P\land R}\land I}{(P\land Q)\lor(P\land R)}\lor I \quad \dfrac{[P\land(Q\lor R)]}{Q\lor R}\land E}{}\lor E^2$$

$$\dfrac{(P\land Q)\lor(P\land R)}{P\land(Q\lor R) \to (P\land Q)\lor(P\land R)}\to I^1$$

20.6 La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi sier at f er like-funksjon dersom $f(-x) = f(x)$ og f er en odde-funksjon dersom $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$

a) Vis at $f(x) = x^2$ er en like funksjon.

Anta $f(x) = x^2$, skal vise $f(-x) = f(x)$

(Hvis) A $\Rightarrow$ B

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x)\cdot(-x) = x \cdot x = x^2 = f(x)$$

b) Hvis at $g(y) = y$ er en oddefunksjon.

Antar $g(y) = y$, skal $g(-x) = -g(x)$

A $\Rightarrow$ B

$g(x) = x$

$$g(-x) = -x = -g(x)$$