Repitisjon

søndag 5. april 2020 13:36

Repitisjon

$\boxed{17.16}$ Ekvivalensrelasjon "$\Leftrightarrow$"

a) $F \Leftrightarrow G$, hvis F er ekvivalent med G.

$[F] = \{G : \text{hvis } G \Leftrightarrow F\}$, dvs mengden av alle formler som er ekvivalent med F.

Sann. vs. Gyldig

b) $\top$, $\bot$,

Gyldig Motsigelse

$[\top]$ = Mengden av alle gyldige formler.

$[\bot]$ = Mengden av alle motsigelser

MOTSIGELSE $P \wedge \neg P$, TAUTOLOGI $P \vee \neg P$

c) $F \Leftrightarrow \neg\neg F$

$\neg\neg F \in [F]$, $F \in [F]$, dvs nei.

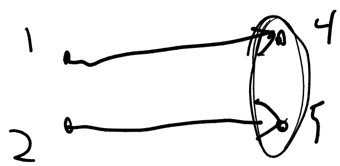
17.18 La $\sim$ være relasjonen slik at $S \sim T$, dersom $|S| = |T|$.

Endelige mengder: Kardinaliteten er et tall.

$|\{1,2,3\}| = 3$

$|\{1,2\}| = |\{4,5\}|$

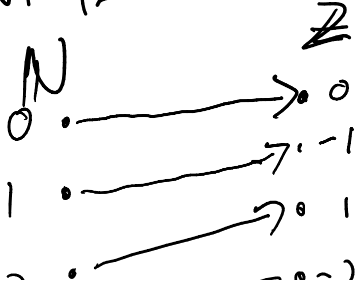
Generelt: $|S| = |T|$ dersom det finnes en bijeksjon fra S til T.



$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

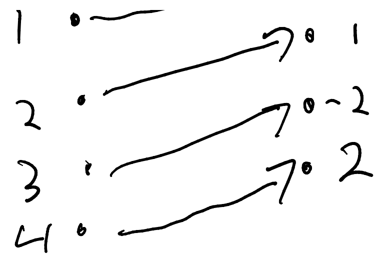
$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$



$\mathbb{R}$

0,453...



i) <u>Refleksivitet</u>: Må finne en bijeksjon $S \to S$, f.eks identitets-relasjon, dvs $S \sim S$, $|S| = |S|$

ii) <u>Symmetri</u>: Anta $S \sim T$, skal $T \sim S$, $|S| = |T|$, dvs det finnes en bijeksjon fra S til T.

Da har vi en bijeksjon fra T til S, gitt ved den inverse relasjonen. Da $|T| = |S|$, dvs $T \sim S$.

<u>Transitiv</u>

$f : T \to S$

$g : S \to U$

Anta $S \sim T$ og $T \sim U$. Da er $|T| = |S|$ og $|S| = |U|$. Da finnes en bijeksjon $f : S \to T$ og en bijeksjon $g : T \to U$. Da finnes en bijeksjon $F \circ g : S \to U$, så $|S| = |U|$.

[illegible]

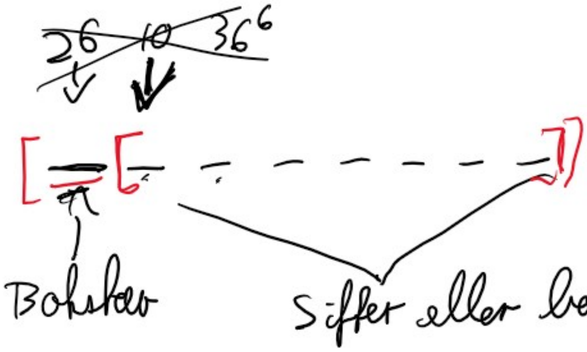
g | bijeksjon $f \circ g : S \to U$, så $S \sim U$.

$f \circ g : T \to U$ | Da $S \sim U$, som var det vi skulle vise. ✓

<u>Ekvivalensklassene</u>

Mengder med samme kardinalitet,
f.eks $\{a, b\} \in [\{1,2\}]$

$\boxed{18.8}$



<u>Begrensning</u>: Det må være minst et siffer.

<u>Uten begrensning</u>: $26 + 10 = 36$

$$36 \cdot 36 \cdot \ldots 36 = 36^7$$

<u>Passord uten siffer</u>: 26^7

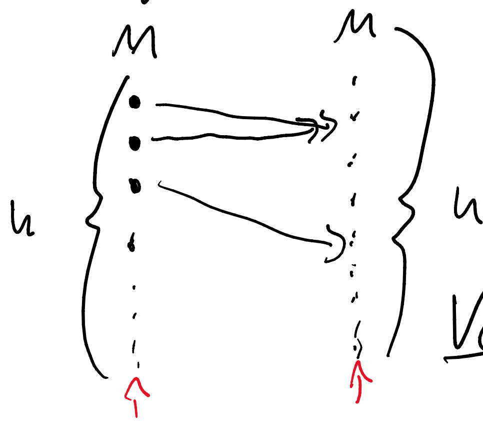
Alle passord − Passord med 0 siffer

$= 36^7 - 26^7$

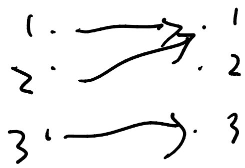
Endelig svar: $26(36^7 - 26^7)$

$\boxed{18.12}$ a) Hvor mange funksjoner

$\boxed{8.12}$ a) Hvor mange funksjoner er det på en mengde med n elementer? $f: \underline{M} \to \underline{M}$

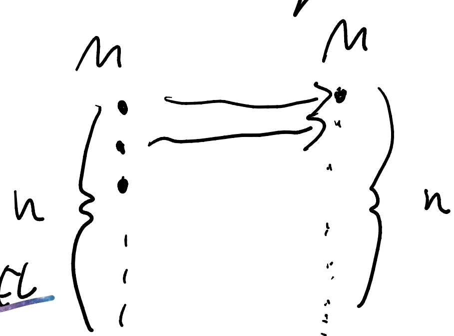


Valg: $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n \text{ ganger}} = n^n$



$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) Hvor mange av disse er bijektive?



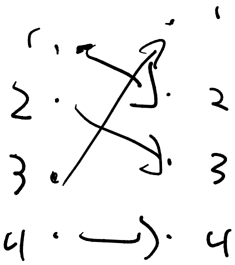
Valg:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

EKSEMPEL

↓

Metafor



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

$\boxed{13.4}$

s. 154

$\boxed{13.4}$

a) $\left(\boxed{\neg \forall x \ \neg Px} \rightarrow (Qx \land Rx)\right)$

$Q \land R \lor P$

$((Q \land R) \lor P)$

Hvis Px er en formel, er $\neg Px$ en formel.

Hvis φ er en formel, er $\forall x \varphi$

Qx og Rx er formler, da er $(Qx \land Rx)$

$\rightarrow$

$\lor$

Endelig svar:

$(\neg \forall x \neg P x \rightarrow (Qx \land Rx))$

Pause fra 13:00 – 13:10

" $>$ "   " $\geq$ "

$3 > 2$, $3 \geq 2$

$\cancel{3 > 3}$ $3 \geq 3$

~~3 > 3~~

$3 \geq 3$

EKTE STØRRE (eller bare "større")

Større eller lik

$\boxed{13.4}$ b) $((\exists x\, Px \land Qx) \lor \exists y\, \neg Ry)$

$\boxed{15.2}$ a) Vis at

$$\forall x(Px \lor Qx) \Rightarrow (\exists x\, Px \lor Qb)$$

er gyldig.

A	$\Rightarrow$	B
0	1	1
0	1	0
1	0	0

Anta at vi har en Modell som gjør $\forall x\,(Px \lor Qx)$ sann.
Vi skal vise at modellen også gjør $(\exists x\, Px \lor Qb)$ sann.

$b^M \in D$

Siden b er et konstant symbol,
... gjelder for alle x.

Siden b er et vilkårlig symbol,
og $Px \vee Qx$ gjelder for alle x,
så må $\underset{1}{Pb} \underset{1}{\vee} \underset{0}{Qb}$.

Hvis Pb er sann i modellen, så er $\exists x\, Px$ sann.

Hvis Qb er sann i $\mathcal{M}$, så er Qb sann.

I begge tilfellene, er $(\exists x\, Px \vee Qb)$ sann i $\mathcal{M}$.

som var det vi skulle vise.

c) Hvis at

$$(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \underset{0}{\to} \exists x(Px \wedge Qx)$$

er falsifiserbar.

Eksistenspåstand.

$$\underset{1}{A} \ \underset{0}{\Rightarrow} \ \underset{0}{B}$$

Vi må finne en modell $\mathcal{M}$, som gjør $(\exists x Px \wedge \exists x Qx)$ sann og $\exists x(Px \wedge Qx)$ usann.

$\exists x(Px \wedge \overline{Qx})$ usann.

$\mathcal{M}$:

$D = \{a^{\mathcal{M}}, b^{\mathcal{M}}\}$

$P = \{a^{\mathcal{M}}\}$

$Q = \{b^{\mathcal{M}}\}$

16.18 Skriv $Pa \wedge (\forall x Qx \vee \forall x Rx)$ på preneks normalform.

$\forall x Qx \vee \forall x Rx$

$x \qquad x$

"Forskjellig"

$$Pa \wedge (\forall x Qx \vee \forall x Rx)$$

$$\Leftrightarrow Pa \wedge (\forall x Qx \vee \forall y Ry)$$

$$\Leftrightarrow Pa \wedge \forall x \forall y (Qx \vee Ry)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\forall x \forall y}\,\underline{(Pa \wedge (Qx \vee Ry))}$$

11.12 $\boxed{\begin{array}{l} -P(0)=1 \\ -O(0)=0 \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{l} P(n+1)=O(n), \\ \boxed{O(n+1)=P(n)} \end{array}}$

Basetilfellene Rekursivesteg

$$P(3)=P(2+1)=O(2)=O(1+1)$$

$$=P(1)=O(0)=0$$

a) Bevis at $P(2n)=1$

$O(2n)=0$ for alle $n\in\mathbb{N}$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots k \to k+1$

Basissteg: Vise for 0:

$$P(2\cdot 0)=P(0)=1$$

$$O(2\cdot 0)=O(0)=0$$

✓

Induksjonshypotese (I.H):

Anta at $\boxed{\begin{array}{l} P(2\cdot k)=1 \\ O(2\cdot k)=0. \end{array}}$

Vi skal vise $P(2\cdot \underset{k+1}{n})=1$, $P(2(k+1))=1$

$O(2(k+1))=0.$

$$P(2(k+1)) = P(2k+2) = P((2k+1)+1)$$
$$= O(2k+1) = P(2k) \overset{I.H}{=} 1$$

$$O(2(k+1)) = O(2k+2) = O((2k+1)+1)$$
$$= P(2k+1) = O(2k) \overset{I.H}{=} 0,$$ som var det vi skulle vise.

<u>Konklusjon</u>, pga matematisk induksjon, er påstanden sann.

$$\underline{P(\underline{n}+1) = O(\underline{n})}$$

$$P(53+1) = O(53)$$

$$P(5a \cdot 7b + 1) = O(5a \cdot 7b)$$

$$P((2k+1)+1) = O(2k+1)$$

b) Bevis at $O(2n+1) = 1$
$P(2n+1) = 0$.

$$O(2n+1) = P(2n) \overset{\text{"a)"}}{=} 1$$

$$P(2n+1) = O(2n) \overset{\text{"a)"}}{=} 0,$$ som var

$P(2n+1) = O(2n) = 0$, som var det vi skulle vise.

8.4 La A og B være mengder.

a) Hvis $A \subseteq B$, er $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

$M = \{1, a\}$, $\underline{\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}}$

$\{1\} \subseteq \{1, a\}$

$X \overset{\text{Hvis}}{\Rightarrow} Y$

$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

↓

Bryr oss om dette er sant

Anta derfor $A \subseteq B$. Vi skal vise at $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

$X \subseteq Y$, hvis $x \in X \Rightarrow x \in Y$

Anta videre $a \in \mathcal{P}(A)$, skal vise at $a \in \mathcal{P}(B)$. Per antagelse vise at $a \in P(B)$. Per antagelse

er $a \subseteq A \subseteq B$, så må $a \subseteq B$.

da er $a \in P(B)$, som var det vi skulle vise.

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (P(A) \subseteq P(B))$$

$a \in$ $\quad$ $a \in$

! $\quad$!