Eksamens oppgaver

mandag 11. mai 2020 12:11

Vår 2019

Merk: Notatene er ment å bli brukt sammen med ZOOM-Gruppetime, ikke alene

(12) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$

a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{A}\}$

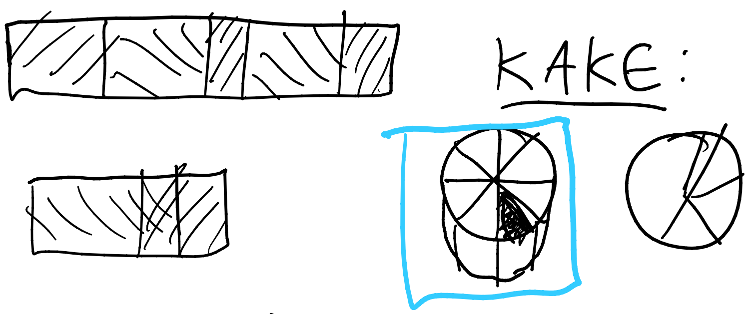
$B = \{b, c\}$

$\{b\} \subseteq B, \quad B \subseteq B$

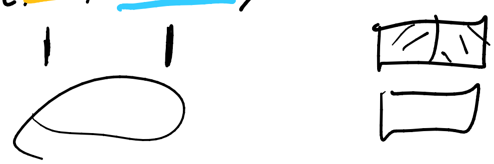
$b \in B$

b) Finn alle partisjoner av A.

KAKE:



$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$



$P_1 = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

$P_2 = \{A\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

c) Hva er kardinaliteten til $|\mathcal{P}(A)|$?

c) Hva er

$\underbrace{A}_{2} \cup \underbrace{P(A)}_{4}$? $\neq 6$

$\boxed{\{a, a\} = \{a\}}$

$A \cup P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$|A \cup P(A)| = 4$

d) Er $\emptyset \in P(\underbrace{A \cup P(A)}_{4})$?

2^4

$\emptyset \subseteq M$

$\emptyset \in P(M)$

$\{\} \subseteq \{m, n, \dots\}$

Ja, siden $\emptyset \in P(M)$ for alle mengder M.

e) Anta X er en partisjon av Y.
Hva er $X \cap P(Y)$?

- Partisjon
- Snitt $A \cap B$
  både er med i A og B
- Potensmengden

$P(Y) = \{M : M \subseteq Y\}$

$P(Y) = \{ M : M \subseteq Y \}$

$x \in X$, da $x \subseteq Y$

Partisjon av Y.

$\underbrace{X}_{\text{Noen delmengder av } Y} \cap \underbrace{P(Y)}_{\text{Alle delmengder av } Y.} = X$

(17) La M være mengden slik at.

"Basis".
- $0 \in M$, og $1 \in M$, og

Hvis $s \in M$ og $t \in M$, så er

"Induksjons-steget".
- $+st \in M$, $\star st \in M$

Hvordan ser M ut?

$M = \{ 0, 1, +01, \star 01, +10, \star 11,$
$++10\star 11, \star 1\star 01, \ldots \}$

a) Er $++0+0+0 \in M$?

Må ha 01, 00, 10, eller 11, hvis det er mer enn 2 tegn.

Nei:

Nei.

b) Er $+\star 0 1 + 0 \star 1 1 \in M$?

$$+(\star 0 1)(+ 0 \star 1 1)$$

$$\star 0 1 \quad + 0 \star 1 1$$

Konstruere elementet (Ovenfra og ned)

Ja

c) Definer $\#: M \to \mathbb{N}$ og $\%: M \to \mathbb{N}$ rekursivt slik at

- $\#(s)$ gir antall forekomster av $+$ og $\star$, $s \in M$.
- $\%(s)$ gir antall forekomster av 0 og 1, $s \in M$.

F.eks $\#(\underbrace{\star 0 + 0 1}_{\in M}) = \underbrace{2}_{\in \mathbb{N}}$, $\%(\star 0 + 0 1) = 3$

#

Basissteg: Definer # for alle elementer i Basismengden B_M. $\boxed{B_M = \{0, 1\}}$

$$\boxed{\#(0) = 0 \qquad \#(1) = 0}$$

$+ \notin M$, $\star \notin M$, $+ \notin B_M$

$+ \notin M$, $\star \notin M$, $+ \notin B_M$

Rekursivt steg:

$s \in M$, og $t \in M$, $+st \in M$, $\star st \in M$

$$\#(\underbrace{\boxed{+}st}_{\text{Neste}}) = \underbrace{\#(s) + \#(t)}_{\text{"Forrige"}} \boxed{+1}$$

$$\#(\star st) = \#(s) + \#(t) + 1$$

Rekursivt steg: "$\underbrace{f(n+1)}_{\text{Neste steg}} = \ldots \underbrace{f(n)}_{\text{Forrige steg}} \ldots$"

$\boxed{\%}$

Basissteg: $B_M = \{0, 1\}$

$$\%(0) = 1 \qquad \%(1) = 1$$

Rekursivt steg: $\boxed{+}\boxed{s}\boxed{t}$

$$\%(+st) = \%(s) + \%(t)$$

$$\%(\star st) = \%(s) + \%(t)$$

$s, t \in M$

"$\#(1 + 0 \star 11)$", $1 + 0 \star 11 \notin M$

$\#(+1+0\star 11) = \#(+st)$

$s = 1$

$t = +0\star 11$

$t = + 0 * 11$

$$\#(\underline{+1+0*11}) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\#(1)} + \underset{\shortparallel}{\#(+0*11)} + 1$$

$$= 0 + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\#(0)} + \underset{\#(1)+\#(1)+1}{\#(*11)} + 1 + 1$$

$$= 0 + 0 + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\#(1)} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\#(1)} + 1 + 1 + 1$$

$= \underline{3}$

Alle $s \in M$ er på formen $*st$ / $+st$ (eller 0 eller 1), der $s, t \in M$.

d) Hvis ved strukturell induksjon at $\boxed{\%_0(s) - \#(s) = 1}$, for alle $s \in M$

Det er alltid 1 flere 0 og 1-ere enn + og $*$-er.

Basissteg: $B_M = \{0, 1\}$

"Sette inn" 0, 1 i påstanden

$\underline{\%_0(0) - \#(0)} = 1 - 0 = \underline{1}$

$\%_0(1) - \#(1) = 1 - 0 = \underline{1}$

Vi har altså vist at påstanden holder for alle elementer i basismengden (Dvs Basissteget)

Resultmengden ...

(Tips: Sett inn, regn ut).

Induksjonshypotese (I.H).
Anta at påstanden holder for $k \in M$, $n \in M$. Dvs $\%(k) - \#(k) = 1$ og $\%(n) - \#(n) = 1$

I.H Antagelse

Vi skal vise "neste steg".

$+kn$, $*kn$

$\%(+kn) - \#(+kn) = 1$ ← Skal vise
$\%(*kn) - \#(*kn) = 1$

$\%(+kn) - \#(+kn)$

$= \%(k) + \%(n) - \#(k) - \#(n) - 1$

$= \underline{\%(k) - \#(k)} + \underline{\%(n) - \#(n)} - 1$

$\overset{I.H}{=} 1 + 1 - 1 = \underline{1}$

$\%(*kn) - \#(*kn)$

$= \%(k) + \%(n) - \#(k) - \#(n) - 1$

$$= \underbrace{\%(k) - \#(k)}_{1} + \underbrace{\%(n) - \#(n)}_{1} - 1$$

$$\overset{I.H}{=} 1 + 1 - 1 = \underline{1}$$

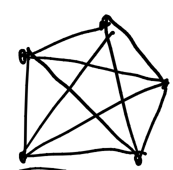
som var det vi skulle vise.

<u>Konklusjon</u>: "Påstanden er sann i følge 'induksjonsbevis'".

$\boxed{\text{Høst 2019}}$

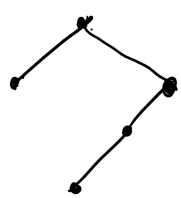
17 Enkel graf med 5 noder

a) Tegn en komplett graff



Alle noder er naboer med alle noder.

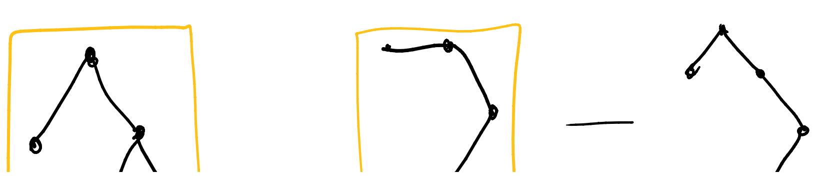
b)



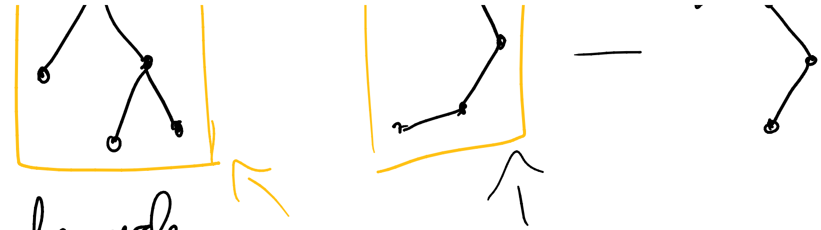
<u>Ikke komplett</u>

<u>Sammenhengende</u>: Man kan vandre fra enhver node til enhver node

c) <u>Tre</u>

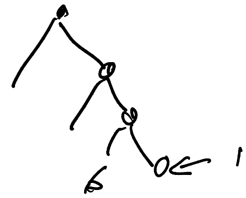


c)



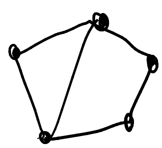
<u>Sammenhengde</u>

<u>Asyklisk</u>

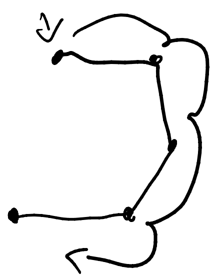


d) · Sammenhengende
· Ikke tre

K_5



e) · Hamiltonsti — noder
· Eulervei — kanter
· <u>ingen</u> eulerkrets



(18) <u>Naturlig deduksjon</u>

· Logisk kalkyle
· Syntaktisk

· Sett med regler
· Alt man kan bevise er gyldig formler

a) Bevis $(P \wedge Q) \to P$

· Bevis: Utledning der alle antagelsene er lukkede.

$$\cfrac{\cfrac{[P \wedge Q]^1}{P}\ \wedge E}{(P \wedge Q) \to P}\ \to I^1$$

b) Gi en utleding av $P \to (P \wedge Q)$ med Q som åpen antagelse

$$\cfrac{\cfrac{[P] \qquad Q}{P \wedge Q}\ \wedge I}{P \to (P \wedge Q)}\ \to I^1$$

"Antagelser" (lukking)

c) Bevis $\neg(P \vee (P \to Q)) \to \neg Q$

$\neg P : P \to \bot$

$$\cfrac{\cfrac{\neg P \quad P}{P \to \bot \quad P}\ \to E}{\bot}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}[P] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg P}\ 1$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[Q]^2}{P \to Q}\ \to I}{P \vee (P \to Q)}\ \vee I \qquad [\neg(P \vee (P \to Q))]^1}{\cfrac{\bot}{\bot^2}}\ \to E$$

$$\dfrac{\neg Q}{\neg(P \vee (P \to Q)) \to \neg Q}\,{\to}I^{1}$$

"Parsing"

$$\dfrac{\dfrac{[(P \vee (P \to Q)) \to \bot]^{2} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^{1}}{P \to Q}\,{\to}I}{P \vee (P \to Q)}\,{\vee}I}{\dfrac{\bot}{\neg Q}\,\neg I^{1}}\,{\to}E}{\boxed{\neg(P \vee (P \to Q)) \to \neg Q}}\,{\to}I^{2}$$

"Tolkning" Bare de øverste formlene er antagelser, og trengs å bli lukket i et bevis

$$\dfrac{\dfrac{[A]^{1}}{A \vee B}\,{\vee}I}{\boxed{A \to (A \vee B)}}\,{\to}I^{1} \qquad \dfrac{\bot}{Q}\,\bot \qquad \dfrac{\begin{matrix}[P] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{P \to \bot}\,\neg I$$

Ingen snarveier i naturlig deduksjon

$\cancel{\dfrac{P \land Q}{Q \land P}}$

$$\dfrac{\dfrac{P \land Q}{Q}\land E \qquad \dfrac{P \land Q}{P}\land E}{Q \land P}\land I$$

(19) La S være den minste mengden, slik at

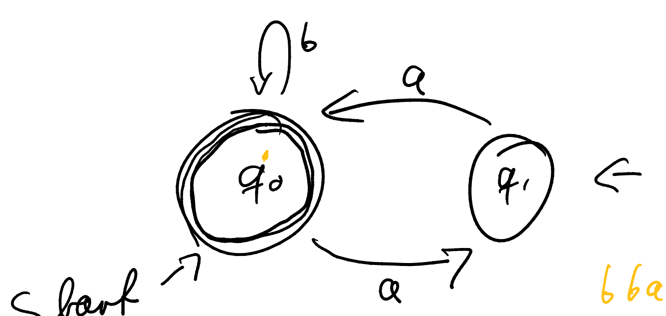
- $\Lambda \in S$
- Hvis $x \in S$, er $xaa \in S$
  $xb \in S$

Hvordan ser S ut? $bx \in S$

a) $S = \{\Lambda, aa, b, aaaa, aab, baa,$
$bb, aabaa, baab, aab, \ldots\}$

$\underline{(aa \mid b)^*} = \{\Lambda, aa, b, aab, baa, aaaa, bb, \ldots\}$

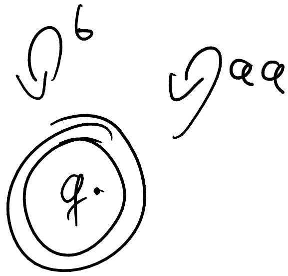
b) DFA kap23



bbaa
bbaaaab

Start

bbaaaaab



$$(\neg P \wedge (P \wedge \neg Q))$$

$$\neg(P \vee (P \to Q))$$