Kap 15 og 16 v2

mandag 23. mars 2020 12:01

Notater fra 23.03.20, klokken 12:15, Tobias Grudahl

Med kommentarer. Merk: Notatene er ikke ment til å brukes alene; de er fra live-gruppetime.

Signatur: (Syntaks, hva har vi "lov til å gjøre")

$$\boxed{\langle 1, 2 ; \max ; \leq , = \rangle}$$

$1, 2, x, y, z, \ldots$ ← Termer

$\max(1,2), \max(x,2)$ ← Termer

Semantikk (Hva betyr det, tolkning)

$\mathcal{M}$: $D = \{1, 2\}$

Modell Domene

$1^{\mathcal{M}} = 1$, $2^{\mathcal{M}} = 2$

Vi tolker 1 som 1 og 2 som 2.

$\max^{\mathcal{M}}$:

$(\max(1,1))^{\mathcal{M}} = 1$

$(\max(1,2))^{\mathcal{M}} = 2$

$(\max(2,1))^{\mathcal{M}} = 2$

$(\max(2,2))^{\mathcal{M}} = 2$

← Definisjon

$\max : D^2 \to D$

Vi tolker max som maks-funksjonen.

Vi tolker "$\leq$" som mindre eller lik

$\leq^{\mathcal{M}}: \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$(1 \leq 1)$ ✓ $(1 \leq 2)$ ✓ $(2 \leq 2)$ ✓

$(2 \leq 1)$ ✗

Vi tolker "=" som =

$(<\doteq 1)\ X$

Vi tolker "$\doteq$" som $=$

$\doteq^{\mathcal{M}}: \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

Jeg bruker infiksnotasjon, $a = b \iff\ =(a,b)$

$\langle a, b ; ; P\rangle$, $\langle ; ; \rangle$

Spørsmål: Går det om å ha en signatur uten funksjonssymbol? Ja, her er et eksempel:

Formler:

$P(a)$

$P(b) \to P(a)$

$\exists x(P(x) \land P(a))$

$\mathcal{M}: \quad D = \{3, 4\}$

$a^{\mathcal{M}} = 3$

$b^{\mathcal{M}} = 4$

$P^{\mathcal{M}} = \{4\}$

$(Pb)^{\mathcal{M}} \qquad (Pa)^{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}}(3)$

$\mathcal{M} \models Pb \qquad \mathcal{M} \not\models Pa$

$\langle a, b, c ; f, g ; P, R\rangle$

$\downarrow$

$D = \{a^{\mathcal{M}}, b^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}\}$

$a^{\mathcal{M}} = 1$

$b^{\mathcal{M}} = 2$

$c^{\mathcal{M}} = 3$

$|\mathcal{M}| = D$

Spørsmål: Hva er greia med $\bar{a}$ notasjon?

Hvis $n \in D$, så er

Hvis $n \in D$, så er

$\bar{n}$ et konstantsymbol, der

$\bar{n}^{\mathcal{M}} = n$

Tilbake til eksempelet vårt:

$\langle 1, 2; \max; \leq, = \rangle$

$1 = 2$ $\qquad =^{\mathcal{M}} : \{\langle 1,1\rangle \langle 2,2\rangle\}$

$\mathcal{M} \not\models 1 = 2$

$\mathcal{M} \models 1 = 1$

$\mathcal{M} \models (1 = 2 \lor 1 = 1)$

$\exists x(\max(x, 1) = 1)$

$\mathcal{M}$ gjør formelen sann, hvis det finnes minst en x slik at

$\mathcal{M} \models \max(x, 1) = 1$

$(\max(1,1) = 1)^{\mathcal{M}}$ Uformell notasjon!

$\max^{\mathcal{M}}(1^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}) =^{\mathcal{M}} 1^{\mathcal{M}}$

$$\max^{\mathcal{M}}(1^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}) =^{\mathcal{M}} 1^{\mathcal{M}}$$

$$\max^{\mathcal{M}}(1, 1) =^{\mathcal{M}} 1$$

$$1 =^{\mathcal{M}} 1$$

$$\langle 1, 1 \rangle \in =^{\mathcal{M}}$$

$$\mathcal{M} \vDash \exists x(\max(x,1) = 1)$$

$$\forall x(\max(x,1) = 1)$$

$$1,\ 2$$

$$(\max(2,1) = 1)^{\mathcal{M}}$$

$$\max^{\mathcal{M}}(2,1) =^{\mathcal{M}} 1$$

$$2 =^{\mathcal{M}} 1$$

$$\langle 2, 1 \rangle \notin =^{\mathcal{M}}$$

15.2 Oppgaver: b) $\mathcal{M} \vDash Rab$ hvis $\langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{M}}$

$$(\forall x Rxa \lor \forall x Rxb) \to \forall x(Rxa \lor Rxb)$$

Anta at $\mathcal{M} \vDash (\forall x Rxa \lor \forall x Rxb)$

[illegible] $\mathcal{M} \vDash \forall x(Rxa \lor Rxb)$

[illegible]

må vise $\mathcal{M} \models \forall x(Rxa \lor Rxb)$

Da vet vi at

(i) $\mathcal{M} \models \forall x Rxa$ eller.

(ii) $\mathcal{M} \models \forall x Rxb$

Hvis (i), da vil

$\mathcal{M} \models \forall x(Rxa \lor Rxb)$, og hvis

(ii), så $\mathcal{M} \models \forall x(Rxb \lor Rxa)$

15.2

e) $\underbrace{(\forall x Rxa \lor \forall x Rxb)}_{\text{"1"}} \underset{\text{"0"}}{\Rightarrow} \underbrace{\forall x(Rax \lor Rbx)}_{\text{"0"}}$

$D = \{1, 2\}$, $a^{\mathcal{M}} = 1$

$b^{\mathcal{M}} = 2$

$R^{\mathcal{M}} \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$\mathcal{M} \models (\forall x Rxa \lor \forall x Rxb)$

$\mathcal{M} \not\models \forall x(Rax \lor Rbx)$

2 $\langle a^{\mathcal{M}}, 2\rangle$

$\langle a^{\mathcal{M}}, 2 \rangle$

$\langle b^{\mathcal{M}}, 2 \rangle \in R^{\mathcal{M}}$

16.7

(1) $\forall x \exists y Rxy$

(2) $\exists y \forall x Rxy$

(3) $\forall x \forall y Rxy$ ← "sterkest"

(4) $\exists x \exists y Rxy$ ← "svakest"

(3) $(\forall x \forall y Rxy) \vDash \{1, 2, 4\}$

(1) $\forall x \exists y Rxy \vDash \{4\}$

(2) $\exists y \forall x Rxy \vDash \{1, 4\}$

(4) $\exists x \exists y Rxy \vDash \emptyset$

Preneks normalform

$(Pa \wedge \forall x Rxa)$ ikke preneks normalform.

$\forall x (Pa \wedge Rxa)$ ← Preneks normalform

$\forall x \exists y \exists z (Ryz \to Px)$ P.N.F

$\forall x \exists y (Py \to \exists z\, Rxz)$ Ikke PNF

$\forall x \exists y \exists z (Py \to Rxz)$ PNF

Skriv på PNF

$(\exists x\, Rxa \vee \forall y\, Py) \Leftrightarrow$

$\exists x (Rxa \vee \forall y\, Py) \Leftrightarrow$

$\exists x \forall y (Rxa \vee Py)$

$(\exists x\, Rxa \vee \forall x\, Px) \Leftarrow$ – Merk: x-ene er "forskjellige". De er ikke under samme skop.

$\not\Leftrightarrow$

$\exists x \forall x (Rxa \vee Px)$

$\Leftrightarrow (\exists x\, Rxa \vee \forall y\, Py)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y (Rxa \vee Py)$