kap 17: Ekvivalensklasser og partisjoner

$S \times S \Rightarrow \sim$ er en delmengde a $S \times S$

$\sim$ - ekvivalensrelasjon på en mengde S

$\sim$ - refleksiv: for alle $x \in S$ $\langle x, x \rangle \in \sim$

$\sim$ - symmetrisk: for alle $x, y \in S$, hvis $\langle x, y \rangle \in \sim$, så $\langle y, x \rangle \in \sim$

$\sim$ - transitiv: for alle $x, y, z \in S$, hvis $\langle x, y \rangle \in \sim$ og $\langle y, z \rangle \in \sim$, så $\langle x, z \rangle \in \sim$

$[x] = \{y \in S \mid y \sim x\}$

$\{[x], [y], \ldots\} \Rightarrow$ kvotientmengden av S under $\sim$

elem fra S

$S = \{1, 2, 3\}$ 

$\sim\, = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$x = y$ $x = y$ $x = y$

$y = x$ $y = x$ $y = x$

• $\sim$ – refleksiv? : for alle $x \in S$, $\langle x, x\rangle$ ja

• $\sim$ – symetrisk? : for alle $x, y \in S$, hvis $\langle x, y\rangle$ så $\langle y, x\rangle$ $\Rightarrow$ ja   usann

• $\sim$ – transitiv? : for alle $x, y, z \in S$, hvis $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, z\rangle$, $\Rightarrow$ så $\langle x, z\rangle$ $x = y = z$

ja $\langle \underset{x}{1}, \underset{y}{1}\rangle$ og $\langle \underset{y}{1}, \underset{z}{1}\rangle \Rightarrow \langle \underset{x}{1}, \underset{z}{1}\rangle$

$\Rightarrow$ $\sim$ – ekvivalensrelasjon

$[1] = \{1\}$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{3\}.$

$\{[1], [2], [3]\}$ = partisjon

$= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ $\Rightarrow$ kvotientmengden av $S/\sim$

Partisjoner av en mengde S

↳ mengde av delmengder av S $= \{ \underbrace{\overset{\neq \emptyset}{\{..\}} \cup \overset{\neq \emptyset}{\{..\}} \cup \dots}_{= S} \}$, $\cap = \emptyset$

element i b

→ •) delmengdene er ikke $\emptyset$

→ •) unionen av alle delmengder $= S$

→ •) snittet av alle delmengder er $\emptyset$

✓ partisjon

$S = \{1, 2, 3\}$

$P_1 = \{\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}\}$ er partisjon av S

$P_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ $\Big\}$ P_1 er finere enn P_2

$P_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ P_2 ikke er finere enn P_3

$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$

$\{\{1, 2, 3\}\}$

$P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$\Downarrow$

$P_1 = \{[1], [2], [3]\}$

$\Downarrow$

$\sim \, = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$

17.13

$\{1\} \neq \emptyset$, $\{2\} \neq \emptyset$, $\{3\} \neq \emptyset$

a) $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ → partisjon → $\boxed{S=\{1,2,3\}}$

$\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}=\{1,2,3\}$

$\{1\}\cap\{2\}=\emptyset$

$\{[1],[2],[3]\}$

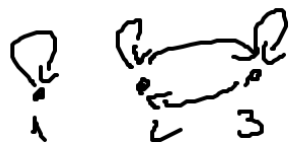
$\sim=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

b) $\{\{1\},\{2,3\}\}$

$\{[1],[2]=[3]\}$

$\sim=\{\langle 1,1\rangle,\ \langle 2,2\rangle,\ \langle 3,2\rangle,\ \langle 3,3\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$\langle 3,2\rangle$: $y = 3$, $x = 2$



17.9. $x \sim y$ bety at " x er like gammel som y " → for hver person x, ekvivalensklassen til x består av alle personene som er like gamle som x

•) ∼ er en ekvivalensrelasjon → ja

1) ∼ er refleksiv : for alle x, $\langle x, x \rangle$

alle personer er like gamle som seg selv

→ det stemmer

2) ∼ er symetrisk

17.16

$\Longleftrightarrow$

$F \Leftrightarrow G$

Hvis x er like gammel som y, så er y like gammel som x.

⇓

hvis $\langle x, y \rangle \in \sim$, så er $\langle y, x \rangle \in \sim$

⇒ det stemmer

17.18

$S \sim T$

$|x| = |y| \Rightarrow |S| = |T|$

3) ∼ er transitiv

Hvis x er like gammel som y og y er like gammel som z, så x er like gammel som z. ⇒ det stemmer

hvis $\langle x, y \rangle \in \sim$ og $\langle y, z \rangle \in \sim$, så $\langle x, z \rangle \in \sim$