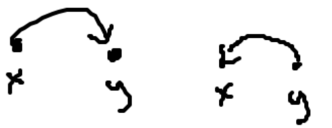
20: Litt om abstrakt algebra

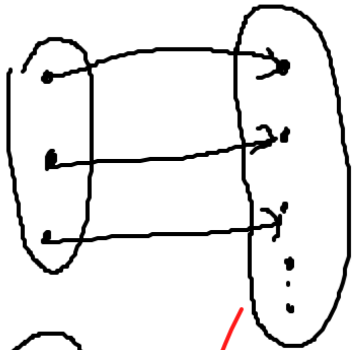
Invers av en relasjon → binære relasjoner

$\langle x, y \rangle \in R$

$\langle y, x \rangle \in R^{-1}$

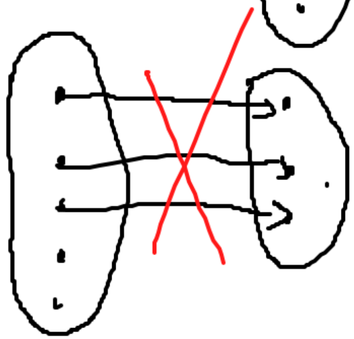


f



surjektiv

f^{-1}?

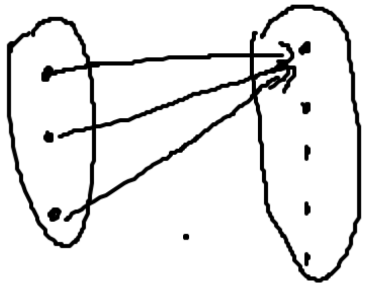


bijektiv funksjon

⇓

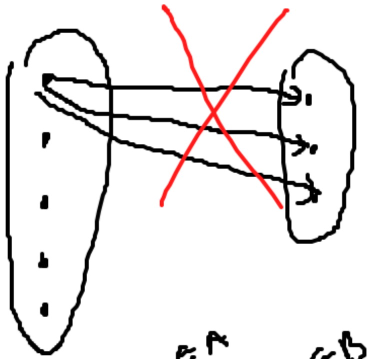
Invers av en funksjon

f



injektiv

f^{-1}?



$f: A \to B$ (where $a \in A$, $b \in B$) $\qquad f(a) = b$

$f^{-1}: B \to A$ (where $b \in B$, $a \in B$) $\qquad f^{-1}(b) = a$

Operasjoner $\Rightarrow$ $f: A \to A$

$f: A \times A \to A$

•) kommutativ

$*$ - operasjon

$x, y \in A$ $\Rightarrow$ $*: A \times A \to A$

$x * y = y * x$

Ex: addisjon $1+2=2+1=3$

•) assosiativ

$x, y, z \in A$

$(x*y)*z = x*(y*z)$

Ex: addisjon: $(1+2)+3 = 1+(2+3) = 6$

•) idempotens

$f(f(x)) = f(x)$ - unære

$x * x = x$ - binære

•) identitetselem

$*$ - op

$x, e \in A$

$x * e = e * x = x$

$\uparrow$ identitetselem

Ex: 0 for addisjon $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

•) invers

$*$ - op

x og $x^{-1} \in A$

$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

$\uparrow$ identitetsel

x og x^{-1}

Gruppen

$\langle G, \bullet \rangle$ ⇐ gruppe

mengde (G), op (•)

- • operasjon assosiativ
- • har e
- alle $x \in G$ har en invers

$\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ - gruppe?

$\Rightarrow \langle \mathbb{N}, + \rangle$

$\langle \mathbb{R}, + \rangle$

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$1 + 2 = 3$

operasjon på $\mathbb{Q}$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \dots$

✓ assosiativ

✓ 0 er identitetselem $\quad x + 0 = 0 + x = x$, for alle $x \in \mathbb{Q}$

$x + (-x) = 0 \qquad x^{-1} + x^{-1} = x^{-1} + x = 0$

$\in \mathbb{Q} \quad \in \mathbb{Q}$

✓ for alle $x \in \mathbb{Q}$ er $(-x) \to x^{-1} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ alle elem har invers

$\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ gruppe

10.5

d) $f(x) = 2x+1$ på $\mathbb{R}$

injektiv

ja

Anta $x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

Vis $f(x) = f(y)$

$x = y \quad | \cdot 2$

$2x = 2y \quad | +1$

$2x+1 = 2y+1$

$f(x) = f(y) \Rightarrow$ konklusjon

surjektiv ja

Anta $f(x) = y$, for alle $y \in \mathbb{R}$ og alle $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = y$

$2x+1 = y$

$2x = y-1$

$x = \frac{y-1}{2} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$

$f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$

f er bijektiv : $f(x) = y$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1} \Rightarrow$ inverse til f : $f^{-1}(y) = x$ $\quad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \boxed{\frac{y-1}{2}}$

Sjekk om inverse stemmer:

$f\left(\frac{y-1}{2}\right) \overset{?}{=} y$

$f\left(\frac{y-1}{2}\right) = \cancel{2} \cdot \frac{y-1}{\cancel{2}} + 1$

$= y-1+1 =$

$= y$

$f(x) = y$