Oppgave 2 – Prøveeksamen 2012

P, Q, R – utsagnsvariabler

$F = (P \to Q) \to (R \wedge \neg R)$

$G = (P \to Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$H = (\neg Q \to \neg P)$

d) Vis at G er en logisk konsekvens av F og H

Obs: vi skal se dette i andre bevis også!

① Hva må vi vise?

→ Hver gang F og H er sanne må G være sann

$$\boxed{(F \wedge H) \to G}$$

② Hvordan kan vi vise?

I. Sannhetsverditabell

kan ikke være sanne samtidig!

gyldig!

P	Q	R	$(P \to Q) \to (R \wedge \neg R)$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
1	1	1	1 0 0	0 1 0	1 1 1 0 0
1	1	0	1 0 0	0 1 0	1 1 1 0 0
1	0	1	0 1 0	1 0 0	0 1 1 1 1
1	0	0	0 1 0	1 0 0	0 1 1 1 1
0	1	1	1 0 0	0 1 1	1 1 0 0 0
0	1	0	1 0 0	0 1 1	1 1 0 0 0
0	0	1	1 0 0	1 1 1	1 1 0 0 1
0	0	0	1 0 0	1 1 1	1 1 0 0 1

Vi ser fra sannhetsverditabellen at

F og H kan ikke være sanne samtidig

⇒ $F \wedge H$ → motsigelse

⇒ $(F \wedge H) \to G$ gyldig!

⇒ G er en logisk konsekvens av F og H

II. Direkte bevis

$(F \wedge H) \to G$

Vi antar at $F \wedge H$ er sann. Vil vise at fra denne antakelsen er G også sann.

$F \wedge H$ er sann $\Rightarrow$ det finnes en valuasjon som gjør $F \wedge H$ sann

$$v(F \wedge H) = 1$$

$$\Rightarrow \quad v(F) = 1 \quad \text{og} \quad v(H) = 1$$

a) Vi tar utgangspunkt i $v(H) = 1$

Hva betyr $v(H) = 1$?

$$v(\neg Q \to \neg P) = 1$$

$\Rightarrow$ tilfelle 1

$v(Q) = 0$; $v(P) = 0$

Hva skjer i F?

$$v((P \to Q) \to (R \wedge \neg R)) = 0$$

0 1 0 0 0

$\Rightarrow$ F og H er ikke sanne samtidig, implikasjonen er $\Rightarrow$ ikke interessert i $v(G)$, uansett sann

tilfelle 2

$v(P) = 1$, $v(Q) = 1$

Hva skjer med F?

$v((P \to Q) \to (R \wedge \neg R)) = 0$

$\quad$ 1 $\;$ 1 $\quad$ 0 $\quad$ 0

$\quad$ 1

$\Rightarrow$ F og H kan ikke være sanne samtidig

$\Downarrow$

$(F \wedge H) \to G$ er sann uansett $v(G)$

tilfelle 3

$v(H) = 1$

$v[\neg Q \to \neg P] = 1$

$v(P) = 0$; $v(Q) = 1$

Hva skjer med F?

$v((P \to Q) \to (R \wedge \neg R)) = 0$

$\quad$ 0 $\;$ 1 $\quad$ 0 $\quad$ 0

$\quad$ 1

$\Rightarrow$ F og H kan ikke være sanne samtidig

$\Downarrow$

$(F \wedge H) \to G$ er sann uansett $v(G)$

Vi kan sett på alle tilfellene når H er sann og har sett at F er usann

$\Rightarrow$ uansett sannhetsverdien til G blir $\underline{(F \wedge H) \to G}$ sann!

$\Rightarrow$ G er en logisk konsekvens av F og H

b) Direkte bevis, utgangspunkt i F

Antar at $F \wedge H$ er sann

$\Rightarrow$ F er sann

H er sann

F er sann $\Rightarrow$ $v(\underbrace{(P \to Q)}_{0} \to \underbrace{(R \wedge \neg R)}_{0}) = 1$

$\Updownarrow$

$v(P \to Q)$ må være 0

$\Rightarrow$ $v(P) = 1$

$v(Q) = 0$

Hva skjer med H da?

$v(\underset{1}{\neg \underset{0}{Q}} \underset{0}{\to} \underset{0}{\neg \underset{1}{P}}) = 0$

$\Rightarrow$ F og H kan ikke være sanne samtidig

$\Updownarrow$

$(F \wedge H) \to G$ er sann uansett $v(G)$

$\Rightarrow$ G er en logisk konklusjon av F og H

OBS: her er det enklere å ta utgangspunkt i $\boxed{F}$!

III Kontrapositiv bevis

⇐ vi beviser dette i stedet

$$(F \land H) \to G \Leftrightarrow \neg G \to \neg(F \land H)$$

Anta at G er usann → det finnes en valuasjon som gjør G usann. Vi vil vise at samme valuasjon v gjør $F \land H$ usann.

$v(G) = 0$

$v[(P \to Q) \lor (P \land \neg Q)] = 0$

$\Rightarrow v(P \to Q) = 0 \Rightarrow v(P) = 1$ og $v(Q) = 0$

$v(P \land \neg Q) = 0$

Men hvis $v(P) = 1$ og $v(Q) = 0$ blir $v(P \land \neg Q) = 1$ selv om vi har antatt at $v(P \land \neg Q) = 0$

⇓

G kan ikke være usann

⇒ uansett hva slags verdi $F \land H$ har er

$\neg G \to \neg(F \land H)$ sann

⇒ G er en logisk konsekvens av F og H

IV Motsigelsesbevis

$$(F \wedge H) \to G$$

Vi antar at $(F \wedge H) \to G$ er usann. Herfra vil vi komme til en motsigelse.

$$v((F \wedge H) \to G) = 0$$

$$\Rightarrow v(F \wedge H) = 1 \Rightarrow v(F) = 1 \; ; \; v(H) = 1$$

$$v(G) = 0$$

$$v(F) = 1 \Rightarrow v((P \to Q) \to \underset{0}{(P \wedge \neg R)}) = 1$$

$$\Rightarrow v(P \to Q) = 0$$

$$\Rightarrow v(P) = 1$$

$$v(Q) = 0$$

Hva skjer med H da?

$$v(H) = v(\underset{1}{\neg \underset{0}{Q}} \underset{0}{\to} \underset{0}{\neg \underset{1}{P}}) = 0$$ $\Rightarrow$ ***motsigelse*** fordi vi har antatt at $v(H) = 1$

$\Rightarrow$ Antakelsen er feil $\Rightarrow$ $(F \wedge H) \to G$ er sann $\Rightarrow$ G er en logisk konsekvens av F og H

Konklusjon

Hva slags bevismetode funker best her?

- Det er opptil deg. Du kommer til motsigelsen uansett hvilken bevismetode vi bruker Så da skulle jeg ha valgt å bare bruke motsigelsesbevis

- Samtidig er det viktig å se på hele oppgaven i b) må man bevise at G er gyldig. kanskje det er noe som kan simplifisere beviset mitt?

Prøv deg med det og lykke til!