Gruppetime 3

Bevis og relasjoner

Planen

1. time
- Gjennomgang av kapitlene sammen med litt eksemlper

2. time

- Individuell jobbing

Kapittel 5 - Bevis

- Hva er et bevis?
  - Fra antagelse til påstand, via logiske slutninger
  - Direkte bevis, kontrapositive bevis, motsigelsesbevis
  - Eksistensbevis, bevis ved tilfeller, moteksempler
- Direkte bevis
  - Hvis F, så G, finner logiske steg som tar oss fra F til G
  - Hvis en valuasjon gjør $P \wedge S$ sann, så gjør valuasjonen S sann
- Kontrapositivt bevis
  - Hvis F så G $\Leftrightarrow$ Hvis ikke G, så ikke F, finner logiske steg som tar oss fra ikke G til ikke F
- Motsigelsesbevis
  - Prøver å anta F usann og viser at dette fører til en motsigelse.
  - Formelen $P \wedge \neg P$ er usann for alle valuasjoner.

Mer bevis

- Eksistensbevis
  - Bevise at noe eksisterer
  - Det finnes en valuasjon som gjør formelen $(P \wedge Q \wedge R)$ sann
- Bevis ved tilfeller
  - Vis at påstanden holder ved alle mulige tilfeller
  - $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $A \subseteq B$
- Moteksempler
  - Motbevise en universell påstand, en form for eksistensbevis
  - Påstand *"Alle tall er delelig med 2"*

Bevis for universelle påstander

- Universelle påstander er påstander som sier noe om “alt”
- Må da bevise at noe gjelder generelt, ofte ikke mulig å bruke eksistensbevis eller bevis ved tilfeller
- Vi må velge oss et ***vilkårlig*** element
  - Et vilkårlig element kan være hva som helst, vi kan kun gjøre antagelser som gjelder for alle elementene beviset skal gjelde for.
  - Vilkårlig er ikke det samme som tilfeldig!

Hvilken bevismetode skal man bruke? 🤨

- Det kommer an på hva du skal bevise
  - Moteksempel: Dersom du skal ***motbevise*** en universell påstand
  - Eksistensbevis: Bevise at noe finnes eller er mulig (ikke universelle påstander)
  - Bevis ved tilfeller: Dersom det er få mulige senarioer (ikke universelle påstander)

- Det krever ofte mer å bevise universelle påstander
  - Det er ofte slik at universelle påstander kan bevsis både med direkte bevis, kontrapositivt bevis og motsigelsesbevis.

Vi kan se på et eksempel

5.5 Bevis påstanden «Hvis $(P \rightarrow Q)$ og $(Q \rightarrow R)$ er sanne, så er $(P \rightarrow R)$ sann» på følgende måter: (a) Ved et direkte bevis. (b) Ved et kontrapositivt bevis. (c) Ved et motsigelsesbevis.

- **(a)** Vi antar at både $(P \rightarrow Q)$ og $(Q \rightarrow R)$ er sanne, og skal vise at det fører til at $(P \rightarrow R)$ må være sann.
  - Det vil si at R må være sann eller P må være usann. På standen holder dersom P er usann, vi må se på tilfellet der P er sann.
  - Siden både P og $(P \rightarrow Q)$ er sann, må Q være sann, → *tolking*.
  - Siden både Q og $(Q \rightarrow R)$ er sann, må R være sann, → *tolkning.*
  - Siden R er sann, følger det at $(P \rightarrow R)$ er sann, → *tolking*, og påstanden er bevist.

- **(b)** Hvis $(P \rightarrow R)$ er usann, så er ikke både $(P \rightarrow Q)$ og $(Q \rightarrow R)$ sanne.
  - Vi antar at $(P \rightarrow R)$ er usann. Da er P sann, og R usann, → *tolkning*.
  - Dersom R er usann, må Q også være usann for at $(Q \rightarrow R)$ skal være sann. Da vil $(P \rightarrow Q)$ være usann siden P er sann og Q er usann. Dersom Q er sann vil $(Q \rightarrow R)$ være usann.
  - Dermed kan ikke både (P -> Q) og (Q -> R) være sanne, hvis (P -> R) er usann, den kontrapositive påstanden er bevist.

- **(c)** Anta for en motsigelse at $(P \rightarrow Q)$ og $(Q \rightarrow R)$ er sanne, og $(P \rightarrow R)$ er usann.
  - Da er P sann og R usann, → *tolking.*
  - Siden både P og $(P \rightarrow Q)$ er sann, må Q være sann. Siden både Q og $(Q \rightarrow R)$ er sann, må R være sann, → *tolking*.
  - R kan ikke være både sann og usann, dermed har vi en motsignelse. Påstanden må dermed være sann.

→ tolkning = Siden det er slik vi tolker →-formler

Kapittel 6 - Relasjoner

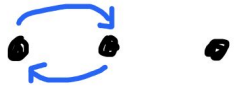
- Hva er en relasjon?
  - Binær relasjon på en mengde S
  - Noen relasjoner vi kjenner til på mengden av naturlige tall:
    - Likhetsrelasjonen, $1 = 1$
    - Mindre/større enn-relasjonene, $1 < 2$ / $2 > 1$

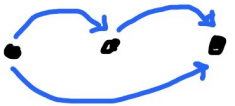
- Litt notasjon
  - x er relatert til y
  - $\langle x,y \rangle \in R$
  - xRy

Egenskaper

- En binær relasjon R på mengden S er … hvis det for alle x, y, z i S er slik at …
  - Refleksiv
    - $\langle x,x \rangle \in R$
  - Symmetrisk
    - ***Hvis*** $\langle x,y \rangle \in R$, ***så*** $\langle y,x \rangle \in R$
  - Transitiv
    - ***Hvis*** $\langle x,y \rangle \in R$ og $\langle y,z \rangle \in R$, ***så*** er også $\langle x,z \rangle \in R$
  - Anti-symmetrisk
    - ***Hvis*** $\langle x,y \rangle \in R$ og $\langle y,x \rangle \in R$, ***så*** $x = y$
  - Irrefleksiv
    - $\langle x,x \rangle \notin R$





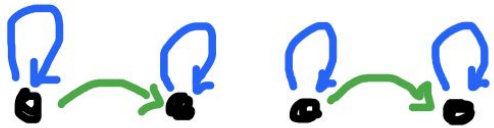


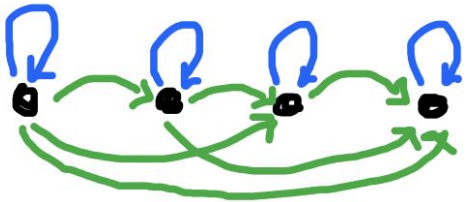
- Tenk på ***hvis-så*** setningene som vi gjør i utsagnslogikk 🤓
- Eneste måten å gjøre dem usanne på er at hvis-delen er oppfylt, men så-delen ikke er det

Mer egenskaper

- Ekvivalensrelasjon
  - Refleksiv, transitiv og symmetrisk
- Partiell ordning
  - Refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk
- Total ordning
  - Partiell ordning
  - Hvis det for alle x, y i S er slik at xRy eller yRx







Hvilke egenskaper har den tomme relasjonen, {} ?

Vi ser på et eksempel

Oppgave

6.8 La $\sim$ være en relasjon på $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ som er definert ved at $x \sim y$ hvis $x + y$ er et partall. Hvilke egenskaper har denne relasjonen?

- **Reflskriv**. x + x = 2x. 2x er delelig på 2 og er et partall.
- **Symmetrisk**. x + y = y + x. Dermed vil y + x være et partall dersom x + y er det.
- **Transitiv**. Dersom x + y er et partall, og y + z er et partall, må x + z være partall.
  - Dersom x + y er et partall er enten både x og y partall, eller både x og y er oddetall. (Fordi partall + oddetall blir oddetall).
  - Dersom x og y er partall, er z også partall, siden y + z er partall. Da er både x og z partall. Partall pluss partall blir partall.
  - Dersom x og y er oddetall, er også z oddetall, siden y + z er partall. Da er både x og z oddetall. Oddetall pluss oddetall blir partall.
- Ikke anti-symmetrisk og ikke irrefleksiv.

Sant/usant kapittel 5

(a) Et moteksempel til påstanden «F er logisk konsekvens av G» er en valuasjon som gjør F sann og G usann. (Sant / Usant)

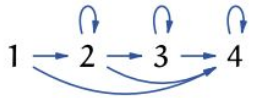
(b) Et moteksempel til påstanden «alle naturlige tall som er delelige med 3, er oddetall» er tallet 9. (Sant / Usant)

(c) Dersom vi har bevist at noe er sant for et *vilkårlig* element i en mengde, har vi også bevist at det holder for *alle* elementer i mengden. (Sant / Usant)

Sant/usant kapittel 6

4 Relasjoner [5 poeng]

La relasjonen R på $\{1, 2, 3, 4\}$ være definert på følgende måte:



(a) R er refleksiv. (Sant / Usant)

(b) R er transitiv. (Sant / Usant)

(c) R er anti-symmetrisk. (Sant / Usant)

(d) $R \cup \{\langle 1, 1\rangle\}$ er en partiell ordning. (Sant / Usant)

(e) $R \setminus \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er irrefleksiv. (Sant / Usant)

Oppgaver hentet fra eksamen v2019

Diverse oppgaver kapittel 5

5.2 Vis følgende påstander ved hjelp av motsigelsesbevis.

(a) *Hvis* $3n + 2$ *er et oddetall, så er* n *et oddetall.*

(b) *Hvis* $(P \vee Q)$ *er sann og* $\neg P$ *er sann, så er* Q *sann.*

(c) *Alle valuasjoner gjør* $P \to (Q \to P)$ *sann.*

(d) *Hvis* $A \subseteq (B \cap C)$, *så* $A \subseteq B$.

Moteksempler

5.4 Forklar hva et moteksempel vil være for følgende påstander:

(a) *Alle politikere er kloke.*
(b) *Hvis du kommer på festen, så blir jeg glad.*
(c) *Du gjør oppgavene eller stryker på eksamen.*
(d) *Boken var spennende og jeg glemte bort tiden.*

5.7 Kan du konkludere med at $A = B$ hvis A, B og C er mengder slik at følgende påstander holder? Hvis det er slik, gi et bevis; hvis det ikke er slik, gi et moteksempel.

$$A \cup C = B \cup C \qquad A \cap C = B \cap C$$

Flere oppgaver kapittel 6

Oppgave

6.2 I denne oppgaven skal du vise at de tre egenskapene refleksiv, symmetrisk og transitiv er *uavhengige* av hverandre. For hvert av punktene, finn en relasjon som har alle egenskapene:

(a) refleksiv, symmetrisk og transitiv
(b) refleksiv, symmetrisk og *ikke* transitiv
(c) refleksiv, *ikke* symmetrisk og transitiv
(d) refleksiv, *ikke* symmetrisk og *ikke* transitiv
(e) *ikke* refleksiv, symmetrisk og transitiv
(f) *ikke* refleksiv, symmetrisk og *ikke* transitiv
(g) *ikke* refleksiv, *ikke* symmetrisk og transitiv
(h) *ikke* refleksiv, *ikke* symmetrisk og *ikke* transitiv

Oppgave

6.6 (a) Kan det være slik at en relasjon er både symmetrisk og anti-symmetrisk? Hvis ja, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(b) Kan det være slik at en relasjon er både refleksiv og irrefleksiv? Hvis ja, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

Oppgaver kapittel 6

Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er refleksiv.

Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er symmetrisk.

Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er transitiv.

Relasjonen $\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på $\{a, b, c, d\}$ er en partiell ordning.

Relasjonen $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$.

Det finnes en relasjon på mengden $\{1, 2, 3\}$ som ikke er identitetsrelasjonen og som både er en ekvivalensrelasjon og en partiell ordning.

Oppgaver hentet fra prøveeksamen h2020