Gruppetime 4

Funksjoner og enda mer mengdelære

Plan for timen

1. time
- Kjapp gjennomgang av ukens kapitler

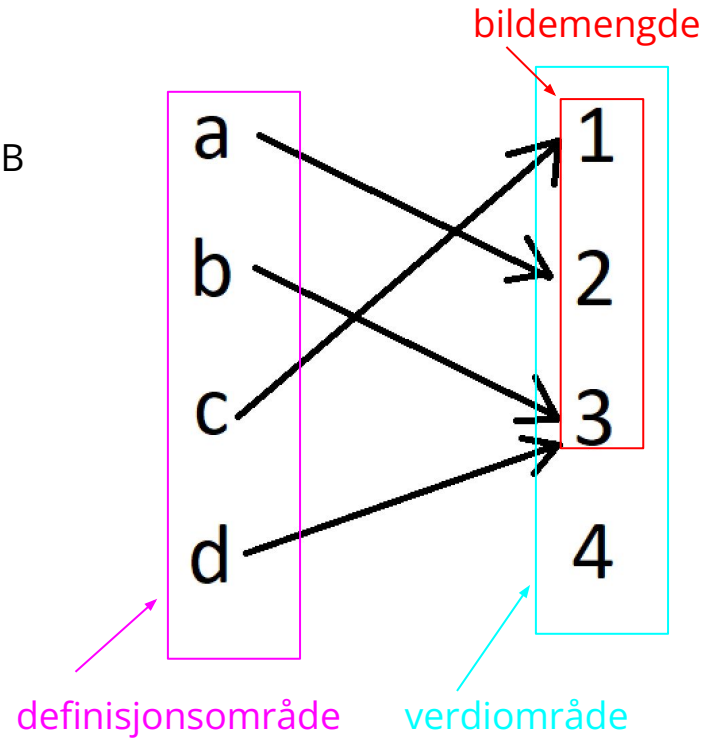
Pause ☕

2. time
- Dere jobber og jeg hjelper

Kapittel 7 - Funksjoner

- Hva er en funksjon?
  - Funksjoner er binære relasjoner
  - f: A → B
  - Alle element i A er relatert til nøyaktig ett element i B
- Definisjonsområde → verdiområde
- Bildemengde
  - Den delen av verdiområdet som blir truffet

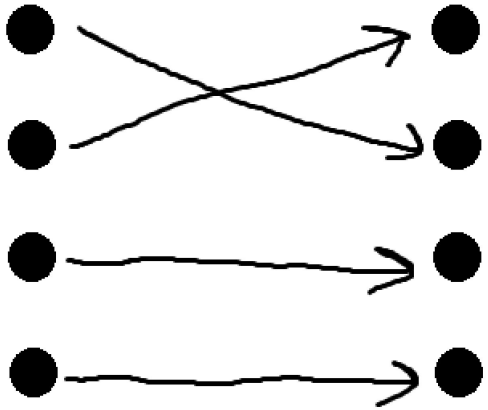
A = {a, b, c, d}
B = {1, 2, 3, 4}
f = {<a,2>, <b,3>, <c,1>, <d,3>}



Egenskaper for funksjoner

- Gitt en funksjon f: A → B

- **Injektive funksjoner** (en-til-en)
  - Alle elementene i A relateres til forskjellige elementer i B
- **Surjektive funksjoner** (på)
  - Alle elementene i B blir relatert til
- **Bijektive funksjoner** (en-til-en korrespondanse)
  - Både injektiv og surjektiv



Sammensetning av funksjoner

- Vi kan anvende en funksjon ***g*** på resultatet av en funksjon ***f***
- (g ∘ f)(x) = g(f(x))

- f: ℕ → ℕ og g: ℕ → ℝ
- g ∘ f : ℕ → ℝ

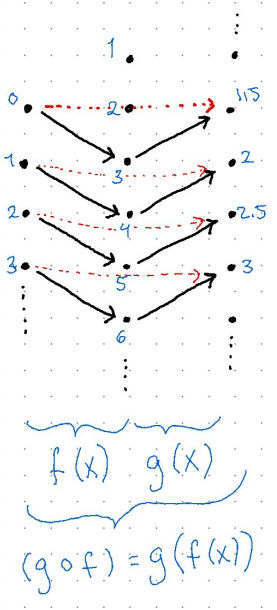
- f(x) = x + 3
- g(x) = x/2

- f(5) = 5 + 3 = 8
- g(5) = 5/2 = 2,5

- (g ∘ f)(5) = g(f(5)) = g(8) = 4

f* = { <0, 3>, <1, 4>, <2, 5>, <3, 6>, ... }
g* = { ..., <3, 1.5>, <4, 2>, <5, 2.5>, <6, 3>, ...}

(g ∘ f)* = {<0, 1.5>, <1, 2>, <2, 2.5>, <3, 3>, ... }



Hva er bildemengden til f, g og (g ∘ f)?

- f[ℕ]: ℕ >= 3, {3, 4, 5, 6, ...}
- g[ℕ]: Halve tall, {0, 0.5, 1, 1.5, ... }
- (g ∘ f)[ℕ]: Halve tall >= 1.5, {1.5, 2, 2.5, 3, ...}

Operasjoner

- Funksjoner der definisjonsområdet = verdiområdet

- **Unær operasjon**
  - Må være fra A til A
  - f(x) = x + 1 (operasjon på $\mathbb{N}$)

- **Binær operasjon**
  - Må være fra A x A til A
  - g(x,y) = x + y (operasjon på N)
  - h(x,y) = x - y (ikke operasjon på $\mathbb{N}$, men en operasjon på $\mathbb{R}$)

Kapittel 8 - Litt mer mengdelære

- Den universelle mengden
  - Det er alltid en underliggende mengde, vi kaller denne for U
  - Vi må alltid ha kontroll på hva U er....
    - om den ikke er spesifisert, står U for en *vilkårlig* mengde (hva som helst kan finnes i en vilkårlig mengde)
- Komplement
  - Vi skriver $\overline{M}$
  - Komplementet til en mengde M er alt som er med i U, men *ikke* er med i M

Oppgave

8.5 Vis at $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$ ~~ved å bruke Venn-diagrammer~~.

Vi må vise at $\overline{\overline{A} \cap B} \subseteq A \cup \overline{B}$, og at $A \cup \overline{B} \subseteq \overline{\overline{A} \cap B}$

Anta at $x \in \overline{\overline{A} \cap B}$

$\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \cap B$

$\Leftrightarrow x \notin \overline{A}$ eller $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$ eller $x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in A \cup \overline{B}$

Anta at $x \in A \cup \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in A$ eller $x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \notin \overline{A}$ eller $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{\overline{A} \cap B}$

Potensmengde og kardinalitet

- Potensmengde
  - Vi skriver P(M) for potensmengden til M
  - Potensmengden til M er mengden av alle delmengder av M
  - P({a}) = {Ø, {a}}
  - Hvis M inneholder n elementer, har P(M) 2^n antall elementer
- Kardinalitet
  - Vi skriver |M|
  - For endelige mengder er kardinaliteten lik antall elementer i mengden
  - Men vi har jo også uendelige mengder 😳

Hva er P({7, {7}} ?

- *P({ 7, {7} }) = { Ø , { 7 } , { {7} } , { 7, {7} } }*
- 💡 *Husk å telle at du har* 2^n elementer med!
- $2^n = 2^2 = 4$

Tellbarhet 🤯

- Tellbar og overtellbar
- Vi bruker mengden av de naturlige tallene, $\mathbb{N}$ som referanse
  - En uendelig mengde M er tellbar dersom det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i M og $\mathbb{N}$
  - Hvis dette finnes, har M lik kardinalitet som $\mathbb{N}$, altså $|M| = |\mathbb{N}|$
  - Hvis dette ikke finnes, er M overtellbar
  - Et eksempel på en overtellbar mengde er de reelle tallene

Vi kan vise at mengden av heltall, $\mathbb{Z}$ er en tellbar mengde med samme kardinalitet som $\mathbb{N}$

- Vi kan dele $\mathbb{Z}$ opp i to grupper, *positive heltall*, og *negative heltall*
- Vi kan også dele $\mathbb{N}$ opp i to grupper, *partall* og *oddetall*
- Nå kan vi lage funksjoner som mapper en gruppe i $\mathbb{N}$ til en gruppe i $\mathbb{Z}$
- La f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ være definert slik at: **$f(2n) = n$** og **$f(2n + 1) = - n - 1$**

Pause 

Oppgaver

For alle mengder A er det slik at potensmengden til A har større kardinalitet enn A.

Kardinaliteten til unionen av A og B er lik kardinaliteten til A pluss kardinaliteten til B.

Mengden av heltall $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er tellbar.

$f: \mathbb{N} \rightarrow M$

$f(2) = 2 \qquad f(5) = 23$
$f(6) = 34 \qquad f(4) = 14$

(**a**) Hva gjør funksjonen? (**b**) Hvilke egenskaper har funksjonen?
(**c**) Er funksjonen en operasjon?

Oppgaver kapittel 7

7.8 For hver av følgende funksjoner, avgjør hvorvidt funksjonen er *en-til-en*, *på*, begge deler eller ingen av delene.

(a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ slik at $f(x) = x + 1$.

(b) Funksjonen $\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$ fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

(c) Funksjonen $\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle d, 3\rangle\}$ fra $\{a, b, c, d\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

(f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at $f(x) = x + 2$.

(g) Funksjonen fra norske ord til mengden av naturlige tall som til ethvert ord gir lengden på ordet i antall bokstaver.

Oppgaver kapittel 8

Oppgave

8.11 Bevis at følgende mengder er tellbare. Hint: Lag en en-til-en korrespondanse mellom hver mengde og de naturlige tallene.

(a) Mengden av positive oddetall.
(b) Mengden av negative heltall.
(c) Mengden av heltall.

Oppgaver kapittel 8

8 Mengdelære [10 poeng]

La A være mengden $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(a) [2 poeng] Hva er $\mathcal{P}(A)$?

(c) [2 poeng] Hva kardinaliteten til $A \cup \mathcal{P}(A)$?

(d) [2 poeng] Er det slik at $\emptyset \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$?

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen våren 2019.)