Gruppetime 7

Førsteordens språk og
kvantifiserte utsagn

Plan for timen

1. time
- Gjennomgangen

Pause ☕

2. time
- Jobbe selv

Vi er over halvveis i pensum, hurra 🎊

Kapittel 13 - Førsteordens språk

- Allkvantoren $\forall$
  - For alle ...
- Eksistenskvantoren $\exists$
  - Det finnes …
- Førsteordens språk
  - Konnektivene: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$
  - Kvantorene: $\forall$, $\exists$
  - Variabler
  - Ikke-logiske symboler

Førsteordens språk - ikke logiske symboler

- Signatur
  - Konstantsymboler
  - Funksjonssymboler
  - Relasjonssymboler
- Mengdene skal være disjunkte (ikke overlappe).
- Funksjons- og relasjonssymbolene har en aritet.
  - Ariteten forteller hvor mange argumenter symbolet tar

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en **signatur** (*eng: signature*).
- En signatur angis som et tuppel av tre mengder på følgende måte:

$$\langle \underbrace{a, b, c, \ldots}_{\text{konstantsymboler}} ; \underbrace{f, g, h, \ldots}_{\text{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R, S, T, \ldots}_{\text{relasjonssymboler}} \rangle$$

Her er konstant-, funksjons- og relasjonssymbolene adskilt med semikolon.

Kapittel 13 - Førsteordens språk

- Termer
  - Alle variabler og konstanter er termer
  - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og , t_1, t_2, … , t_n er temer, så er f(t_1, t_2, … , t_n) også en term
- Formler
  - Atomære
    - Relasjonssymbol med riktig antall termer.
  - Sammensatte
    - Formler kan settes sammen ved hjelp av konnektivene og kvantorene. (på bestemte måter, se definisjon på neste slide)

Definisjon (Førsteordens formler)

Anta at førsteordens språk er gitt. Mengden av **førsteordens formler** (*eng: first-order formulas*), eller bare **formler** (*eng: formulas*), er den minste mengden slik at:

- Alle atomære formler er **formler**.
- Hvis φ og ψ er formler, er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ **formler**.
- Hvis φ er en formel og x er en variabel, er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ **formler**.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være **bundet** (*eng: bound*) i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor **skopet** (*eng: scope*) til den gjeldende kvantoren.

Oppgaver kapittel 13

Oppgave

13.2 Avgjør hvilke av følgende uttrykk som er førsteordens *termer*, gitt at signaturen er $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\,;\, \mathsf{f}, \mathsf{g}\,;\, \mathsf{P}, \mathsf{R} \rangle$, at ariteten til f og P er én og at ariteten til g og R er to. Hvis uttrykket ikke er en *term*, forklar hvorfor ikke.

(a) x
(b) $\mathsf{f}(x)$
(c) $\mathsf{g}(x, \mathfrak{b})$
(d) $\mathsf{g}(\mathfrak{a})$
(e) $\mathsf{f}(x, x)$
(f) $\mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{R}(x, \mathfrak{a})$
(g) $\forall x \mathsf{P}x$
(h) $\mathsf{f}(\mathsf{f})$
(i) $\mathsf{f}(\mathsf{P}(\mathfrak{a}))$
(j) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))))))$

(a) Term, fordi x er en variabel
(b) Term, fordi f er et funksjonssymbol med aritet 1, og x er en term.
(c) Term, fordi g er et funksjonssymbol mer aritet 2, og x og b er termer
(d) Ikke term, fordi g har aritet to, men får bare ett argument
(e) Ikke en term, fordi f har aritet 1, men får to argumenter

Oppgave

13.3 Avgjør hvilke av følgende uttrykk som er førsteordens *formler*, gitt at signaturen er $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\,;\, \mathsf{f}, \mathsf{g}\,;\, \mathsf{P}, \mathsf{R} \rangle$, at ariteten til f og P er én og at ariteten til g og R er to. Hvis uttrykket ikke er en formel, forklar hvorfor ikke.

(a) $\mathsf{R}(x, \mathfrak{b})$
(b) $\forall x \mathsf{R}(x, \mathfrak{b})$
(c) $\mathsf{R}(\forall x \mathsf{P}x, \mathfrak{b})$
(d) $\mathsf{P} \vee \mathsf{R}(x, x)$
(e) $\exists \forall x \mathsf{P}x$
(f) $\mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathfrak{a})), w)$
(g) $\exists y \wedge \forall y \mathsf{P}y$
(h) $\mathsf{P}x \rightarrow \exists y \mathsf{R}(y)$
(i) $\forall x \mathsf{P}(x, \mathfrak{a})$
(j) $\forall y \mathsf{R}(\mathfrak{a})$
(k) $\exists z \mathsf{P}(\mathfrak{a})$
(l) $\exists z \exists y \forall z \mathsf{P}(z)$
(m) $(\mathsf{P}x)$
(n) $\mathsf{f}(\mathsf{P}(x))$
(o) $\mathsf{R}(\mathsf{P}(\mathfrak{a}), \mathfrak{b})$
(p) $(\exists x \mathsf{P}x)$
(q) $\forall x \mathsf{f}(x)$
(r) $\mathsf{P}x \exists x x$

(a) Formel, fordi R er et relasjonssymbol med aritet to
(b) Formel, fordi R er en formel, og vi kan sette sammen formler med kvantorer
(c) Ikke formel, fordi en relasjon kun kan ta inn termer som argumenter
(d) Ikke formel, fordi P har aritet en
(e) Ikke formel, fordi vi kan ikke sette to kvantorer etter hverandre slik

Kapittel 14 - Representasjon av kvantifiserte utsagn

- Predikat
  - Et uttrykk som inneholder en eller flere plassholdere og som blir sant eller usant når vi erstatter plassholderne med verdier

- Presedensregler og skop for førsteordens formler
  - Kvantorene ($\forall$, $\exists$) binder like sterkt som negasjon ($\neg$).
    - Se presedensregler for konnektivene side 25!
  - $\forall x\, Fx \wedge Rx$

- Frie variabler og lukkede formler
  - En variabel er fri, hvis den ikke er bundet av en kvantor.
  - En formel uten frie variabler er lukket.
    - Vi ønsker (nesten) alltid å lage lukkede formler
  - $\forall x Fzx$
  - $\forall x Fxx$
  - $\forall x \exists y Pxy \rightarrow \forall z Tzx$
    - $\forall x(\exists y Pxy \rightarrow \forall z Tzx)$

Oppgave

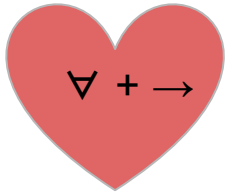
14.8 Anta at S, E, F og L er relasjonssymboler slik at Sx tolkes som «x er en student», Exy tolkes som «x elsker y», Fxy tolkes som «x er forelsket i y» og Lxy tolkes som «x liker y». Anta at a, b og c er konstantsymboler som representerer Anna, Bernt og Carl. Finn førsteordens formler for følgende setninger: (a) *Alle elsker*

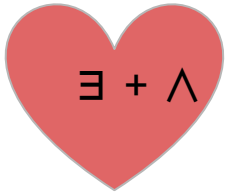
(a)	Alle elsker bernt
(b)	Anna elser Bernt, men Bernt elsker ikke Anna
(c)	Carl elsker alle studenter
(d)	Carl elsker bare studenter
(e)	Noen studenter er forelsket i Carl
(f)	Bernt elsker Anna og liker ikke de som er forelsket i henne
(g)	Bernt er forelsket i en student som er forelsket i Carl
(h)	Alle som elsker en person, både liker og er forelsket i denne personen
(i)	Det finnes noen som ikke er forelsket
(j)	Noen er forelsket i noen som de ikke liker
(k)	Noen er forelsket i noen som ikke er forelsket tilbake
(l)	Anne liker ikke de som liker alle
(m)	Bernt liker kun de som elsker seg selv

(a)	$\forall xExb$
(b)	$Eab \land \neg Eba$
(c)	$\forall x(Sx \rightarrow Ecx)$
(d)	$\forall x(Ecx \rightarrow Sx)$
(e)	$\exists x(Sx \land Fxc)$
(f)	$Eba \land \forall x(Fxa \rightarrow \neg Lbx)$
(g)	$\exists x(Fbx \land Sx \land Fxc)$
(h)	$\forall x \forall y(Exy \rightarrow (Fxy \land Lxy))$
(i)	$\exists x \forall y \neg Fxy$ // $\exists x \neg \exists y Fxy$
(j)	$\exists x \exists y(Fxy \land \neg Lxy)$
(k)	$\exists x \exists y(Fxy \land \neg Fyx)$
(l)	$\forall x \forall y(Lxy \rightarrow \neg Lax)$
(m)	$\forall x(Lbx \rightarrow Exx)$

Noen kjøreregler for å representere utsagn

- Finn ut hva slags informasjon vi har her
  - Hvilke relasjonssymboler er med
  - Hvilke konstanter er med
  - Hvilke variabler er med
- Del opp utsagnet
- Husk å få med all informasjon, hvis vi snakker om noe med en egenskap, må denne egenskapen være representert
- Pass på at alle variabler er bundet til en kvantor
- Noen/det finnes: > *eksistenskvantor*.
- Alle : > *allkvantor*



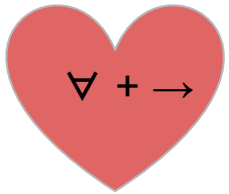


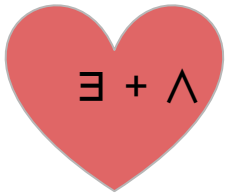
- Tommelfinger-regel
  - Allkvantoren trives godt med implikasjon, men ikke (sjeldent) med og
    - Ofte vil vi representere alle innenfor en gitt gruppe, *alle studenter/alle partall/alle katter*, da bruker vi implikasjon for å si at vi snakker om alle x, slik at hvis x er i denne gruppen, så …
  - Eksistenskvantor trives godt sammen med og, men ikke (aldri) med implikasjon
    - En god sjekk er å skrive om implikasjonen fra $\exists x(Px \rightarrow Qx)$ til $\exists x(\neg Px \vee Qx)$, det er som regel aldri det du mener.

7 Representasjon av kvantifiserte utsagn [6 poeng]

Anta at K, S og E er relasjonssymboler slik at

Kx tolkes som «x *er er en katt*»,
Sx tolkes som «x *er søt*» og
Exy tolkes som «x *eier* y».





(a) $\forall x(Kx \wedge Sx)$ representerer «*alle katter er søte*» (Sant / Usant)

(b) $\neg\exists x(Kx \wedge Sx)$ representerer «*ingen katter er søte*» (Sant / Usant)

(c) $\forall xExx$ representerer «*alle eier seg selv*» (Sant / Usant)

(d) $\forall x\exists y(Exy \wedge Ky \wedge Sy)$ representerer «*alle eier en søt katt*» (Sant / Usant)

(e) $\exists x\neg(Kx \wedge Sx)$ representerer «*det finnes en katt som ikke er søt*» (Sant / Usant)

(f) $\exists x(Kx \wedge Sx \wedge \forall y\neg Eyx)$ representerer «*det finnes en søt katt som ikke har en eier*» (Sant / Usant)

(a) Usant
- (i) Riktig tolkning: Alle er søte katter
- (ii) Alle katter er søte: $\forall x(Kx \rightarrow Sx)$

(b) Sant

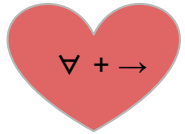
(c) Sant

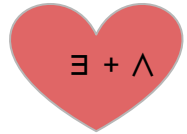
(d) Sant

(e) Usant
- (i) Riktig tolkning: Det finnes noe som ikke er en søt katt
- (ii) Det finnes en katt som ikke er søt: $\exists x(Kx \wedge \neg Sx)$

(f) Sant

5 Førsteordens logikk





Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall» og Qx tolkes som «x er et karantenetall», så vil formelen $(\forall xPx \vee \forall yQy)$ representere utsagnet «ethvert tall er enten et positivt tall eller et karantenetall».

Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall» og Qx tolkes som «x er et karantenetall», så vil formelen $\exists x(Qx \rightarrow Px)$ representere utsagnet «det finnes et karantenetall som også er et positivt tall».

Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall», Qx tolkes som «x er et karantenetall» og Rxy tolkes som «tallet x er relatert til tallet y», så vil formelen $\exists x(Qx \wedge \forall y(Rxy \rightarrow Py))$ representerer utsagnet «det finnes et karantenetall som bare er relatert til positive tall».

(1) Usant
   (a) Riktig tolkning: Alle tall er positive tall eller alle tall er karantenetall
   (b) $\forall x(Px \vee Qx)$ uttrykker utsagnet

(2) Usant: Dette er et rart utsagn…
   (a) "det finnes et tall, slik at hvis dette tallet er karantenetall, så er dette tallet også partall."
   (b) Denne påstanden er oppfylt dersom det finnes et tall som ikke er karantenetall (da er hvis-delen oppfylt). Eksempel på at eksistenskvantor og implikasjon ikke er det vi ønsker å uttykke.
   (c) $\exists x(Px \wedge Qx)$ uttrykker utsagnet

(3) Sant

Oppgave

13.4 Bruk presedensreglene og sett alle parentesene på rett plass:

(a) $\neg \quad \forall x \quad \neg \quad Px \quad \rightarrow \quad Qx \quad \wedge \quad Rx$

(b) $\exists x \quad Px \quad \wedge \quad Qx \quad \vee \quad \exists y \quad \neg \quad Ry$

(a) $(\neg\, \forall x\, \neg\, Px \rightarrow (Qx \wedge Rx))$

(b) $((\exists x\, Px \wedge Qx) \vee \exists y\, \neg\, Ry)$

Kommentarer:

- Det er kun konnektivene $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ som introduserer parenteser.
- Kvantorer og negasjon binder alltid det som kommer *rett etter*, og **ingen** parenteser dannes

- Flere metoder for å gå frem
  - Kan begynne å finne ut hvem som binder sterkes først
  - Kan begynne med å finne ut hvem som binder svakest først

- Få oversikt
  - Tell antall $\wedge$ $\vee$ og $\rightarrow$ er det = antall parenteser skal det være totalt
  - Hvilke deler av uttrykket er det konnektivene "sloss" om?

Oppgaver kapittel 14

Oppgave

14.4 For hver av følgende formler, finn ut hvilke variabler som forekommer frie og hvilke som forekommer bundne:

(a) Rxy
(b) $\forall xSxy$
(c) $\forall x\exists yTxy$
(d) $\forall xRxy \wedge Px$
(e) $\forall x(Rxy \wedge Px)$
(f) $\forall y(Ryy \wedge Py)$

(a) x og y er frie
(b) y er fri
(c) Ingen frie variabler
(d) y er fri i Rxy, og x er fri i Px
(e) y er fri
(f) Ingen frie variabler

Oppgaver

1. **La Gxy tolkes som “x er glad i y”. La Rx tolkes som “x er rar”**

Finn naturlige norske setninger for disse førsteordens formlene

(a) $\forall x \exists y Gxy$

(b) $\forall x \forall y(Gxy \land Gyx) \lor \forall x \forall y(\neg Gxy \land \neg Gyx)$

(c) $\exists x \forall y(Ry \rightarrow Gxy)$

(d) $\forall y \exists x(Ry \rightarrow Gxy)$

2. **Finn førsteordens formler for disse setningene. Velg førsteordens språk selv**

Alle politikere er til å stole på

Noen politikere er upopulære

Løsning

1. **La Gxy tolkes som "x er glad i y". La Rx tolkes som "x er rar"**

Finn naturlige norske setninger for disse førsteordens formlene

a) $\forall x \exists y Gxy$: > Alle er glad i noen
   i) For alle x, finnes det en y, slik at x er glad i y

b) $\forall x \forall y(Gxy \land Gyx) \lor \forall x \forall y(\neg Gxy \land \neg Gyx)$: > Enten så er alle glad i hverandre, eller så er ingen glad i hverandre
   i) For alle x, for alle y er det slik at x er glad i y, og y er glad i x, **eller** for alle x, for alle y, er det slik at x ikke er glad i y og y er ikke glad i x.

c) $\exists x \forall y(Ry \rightarrow Gxy)$: > Det finnes noen som er glad i alle som er rare
   i) Det finnes en x, for alle y, slik at hvis y er rar, så er x glad i y.

d) $\forall y \exists x(Ry \rightarrow Gxy)$: > Alle som er rare, har noen som er glad i seg
   i) For alle y, finnes en x, slik at hvis y er rar, så er x glad i y.

2. **Finn førsteordens formler for disse setningene. Velg førsteordens språk selv**
   Lar Px står for "x er en politiker", Sx står for "x er til å stole på", og Ux står for "x er upopulær"

   a. Alle politikere er til å stole på: $\forall x(Px \rightarrow Sx)$
   b. Noen politikere er usikre: $\exists x(Px \land Ux)$

Pause

