Gruppetime 8

Tolkning i og resonnering om modeller

Plan for timen

1. time
- Gjennomgangen

Pause ☕

2. time
- Selvstendig jobbing

Kapittel 15 - Tolkning i modeller

- Hva er en modell? 😱
  - *En modell er en "oppskrift" på hvordan vi skal tolke et språk.*
  - Domenet, D
    - Ikke tom mengde. Skrives ofte $|\mathcal{M}|$
  - Tolkning av symboler
    - Konstantsymboler, k^M
      - Alle konstantsymboler i signaturen til språket blir tolket i modellen
    - Funksjonssymboler, f^M
      - Alle funksjonssymboler i signaturen blir tolket i modellen
      - En funksjon dra D^n til D
    - Relasjonssymboler, R^M
      - Alle relasjonssymbolder i signaturen blir tolket i modellen
      - En n-ær relasjon, en delmengde av D^n

Definisjon (Modell)

En **modell** (*eng: model*) $\mathcal{M}$ for et gitt førsteordens språk består av en ikke-tom mengde D, kalt **domenet** (*eng: domain*) til modellen, og en funksjon som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis k er et konstantsymbol, er $k^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^n til D.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, er $R^{\mathcal{M}}$ en n-ær relasjon på D, det vil si en delmengde av D^n.

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Kapittel 15 - Tolkning i modeller

Vi lar M være en modell, t_n er termer, f(...) er en funksjon, R(...) en atomær formel

- Tolkning av termer
  - Må være lukket 🔒 (ingen variabler)
  - $f(t_1, ..., t_n)^M = f^M(t_1{}^M, ... , t_2{}^M)$
    - Modellen forteller vi hvordan vi tolker f^M og $t_n{}^M$
- Tolkning av formler
  - Rekursivt definert
    - Basissteg: Atomære formler
    - Rekursjonssteg: Sammensatte formler
  - En formel R kan være sann eller usann i M
    - $<t_1, ..., t_n> \in R^M$

Definisjon (Tolkning av en lukket atomær formel)

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell for et førsteordens språk, og la $R(t_1, \ldots, t_n)$ være en lukket atomær formel.
- Vi sier at formelen $R(t_1, \ldots, t_n)$ er **sann** (*eng: true*) i $\mathcal{M}$ og skriver $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis følgende holder:

$$\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$$

- Fra tidligere har vi lært å tolke relasjoner som mengder av tupler, det gjør vi fortsatt
  - Unære relasjoner beskrives som en mengde med elementer (uten tupler)
- For å avgjøre om en formel er sann eller ikke, må vi finne ut om tuppelet som blir presentert finnes relasjonen R, slik R er tolket i modellen
- Modellen gir oss tolkningen av R

- R representerer atomære formler
- Alle argumentene til R er termer (t_n)
- φ og ψ representerer sammensatte formler
- Modellen M må alltid spesifiseres for at vi kan tolke formlene.
- Vi kjenner igjen måten vi kan bygge opp formler fra tidligere. Vi kan sette dem sammen med hjelp av konnektiver og kvantorer.
- Vi tolker konnektiver og kvantorer på samme måte som før

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

Anta at $\mathcal{M}$ er en modell for et gitt førsteordens språk. Vi definerer rekursivt hva det vil si at en lukket formel φ er **sann** (*eng: true*) i $\mathcal{M}$. Skrivemåten $\mathcal{M} \models \varphi$ betyr at φ er sann i modellen $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$	hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
$\mathcal{M} \models \neg\varphi$	hvis det *ikke* er tilfellet at $\mathcal{M} \models \varphi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for alle* a i $\lvert\mathcal{M}\rvert$.
$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for minst en* a i $\lvert\mathcal{M}\rvert$.

Når φ er sann i $\mathcal{M}$, sier vi også at $\mathcal{M}$ er en **modell for** (*eng: model for*) φ, at $\mathcal{M}$ gjør φ sann og at $\mathcal{M}$ **oppfyller** (*eng: satisfies*) φ. Alt dette betyr det samme

Kapittel 15 - Tolkning i modeller

- M er en modell med domenet **{1, 2, 3}**
- Konstantsymbolet **a** tolkes som **2**
  - $a^M = 2$
- Konstantsymbolet **b** tolkes som **3**
  - $b^M = 3$

- Funksjonssymbolet **f** tolkes som en funksjon med aritet en på **{1, 2, 3}** som gir **2** hvis argumentet er et partall og **1** hvis det er et oddetall
  - $f(a)^M = f^M(a^M) = f^M(2) = 2$
  - $f(b)^M = f^M(b^M) = f^M(3) = 1$

- Relasjonssymbolet R tolkes som **{⟨1, 3⟩, ⟨2, 3⟩, ⟨3, 3⟩}**
- Tolkning av lukkede formler 🔒
  - Atomære formler
    - Rab^M
      - Sann i M fordi $a^M = 2$, $b^M = 3$ og **⟨2, 3⟩** $\in R^M$
    - Rba^M
      - Ikke sann i M fordi $a^M = 2$, $b^M = 3$ og **⟨3, 2⟩** $\notin R^M$
  - Sammensatte formler
    - $\forall xRxb^M$ $\exists xRbx^M$ $\exists xRbx \wedge \forall xRxb^M$
    - For å tolke disse...
      - Hva er b^M? $b^M = 3$
      - Hva er alle x? Hele domenet, altså {1,2,3}.
      - Er både 1, 2 og 3 relatert til 3? Ja
      - Finnes det noen elementer som 3 relaterer til? Ja, 3.

Gyldige, oppfyllbare, falsifiserbare og kontradiktoriske formler

- Gyldig
  - Hvis alle modeller gjør denne formelen sann
  - $\forall x(Px \vee \neg Px)$
- Oppfyllbar
  - Det finnes en modell som gjør formelen sann
  - $\forall xPx$
- Falsifiserbar
  - Det finnes en modell som gjør formelen usann
  - $\forall xPx$
- Kontradiktorisk
  - Formelen er usann i alle modeller
  - $\exists x(Px \wedge \neg Px)$

Oppgaveløsing kapittel 15

15.2 Vis at følgende formler er gyldige:

(a) $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\exists xPx \vee Qb)$

Vis at følgende formler er falsifiserbare:

(c) $(\exists xPx \wedge \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

Løsning 15.2

(a)

- La M være en modell som gjør $\forall x(Px \vee Qx)$ sann. Da må vi vise at denne modellen også gjør $(\exists xPx \vee Qb)$ sann.
- Lar b være en konstant domenet.
- Da vet vi at enten så er Pb sann eller Qb.
- Dersom Qb er sann, er $(\exists xPx \vee Qb)$ sann, fordi det er slik vi tolker $\vee$-formler.
- Dersom Pb er sann, er $\exists xPx$ sann og dermed $(\exists xPx \vee Qb)$ sann, fordi det er slik vi tolker $\vee$-formler.

(c)

- Her holder det å finne en modell som gjør denne formelen usann.
- Vi lager en enkel modell, M, med domenet, D = {1, 2}
- For at denne formelen skal være usann må modellen gjøre ...
  - ... $\exists xPx \wedge \exists xQx$ sann
  - ... $\exists x(Px \wedge Qx)$ usann
- For å gjøre $\exists xPx$ sann, kan vi tolke $P^M = \{1\}$
- For å gjøre $\exists xQx$ sann, kan vi tolke $Q^M = \{2\}$
- $\exists x(Px \wedge Qx)$ er usann, fordi Q1 og P2 er usanne.

Kapittel 16 - Resonnering om modeller

- Ekvivalens
  - To lukkede formler φ og ψ er ekvivalente hvis det er slik at
  - For enhver modell $\mathfrak{M}$, vil $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ hvis og bare hvis $\mathfrak{M} \vDash \psi$
- Logisk konsekvens
  - Hvis M er en mengde lukkede formler, og φ er en lukket formel, er φ en logisk konsekvens av M hvis det er slik at
  - φ er sann i enhver modell som gjør alle formlene i M sanne samtidig.

Dette er akkurat den samme tolkningen av ekvivalens og logisk konsekvens som vi lærte tidligere i kurset 🤓

Preneks normalform

- Alle kvantorene er utenfor formelen
- En formel på formen $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\varphi$ er på preneks normalform, der hver Q_i er enten $\forall$ eller $\exists$ og φ er uten kvantorer.

- Disse reglene er listet opp på side 188, bruk dem 🦊

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \forall x\psi$$
$$\forall x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$$
$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \forall x\psi$$
$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \exists x\psi \rightarrow \varphi$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \exists x\psi$$
$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \exists x\psi$$
$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \forall x\psi \rightarrow \varphi$$

Oppgaver kapittel 16

Oppgave

16.18 Gjør om $Pa \wedge (\forall xQx \vee \forall xRx)$ preneks normalform.

Løsning 16.18

$\forall x(\varphi \wedge \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \wedge \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \wedge \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \wedge \exists x\psi$
$\forall x(\varphi \vee \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \vee \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \vee \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \vee \exists x\psi$
$\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \rightarrow \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \rightarrow \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \rightarrow \exists x\psi$
$\forall x(\psi \rightarrow \varphi)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\psi \rightarrow \varphi$	$\exists x(\psi \rightarrow \varphi)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\psi \rightarrow \varphi$

$Pa \wedge (\forall xQx \vee \forall xRx) \Leftrightarrow (Pa \wedge (\forall xQx \vee \forall yRy))$

$\Leftrightarrow (Pa \wedge \forall x(Qx \vee \forall yRy))$

$\Leftrightarrow (Pa \wedge \forall x\forall y(Qx \vee Ry))$

$\Leftrightarrow \forall x(Pa \wedge \forall y(Qx \vee \forall yRy))$

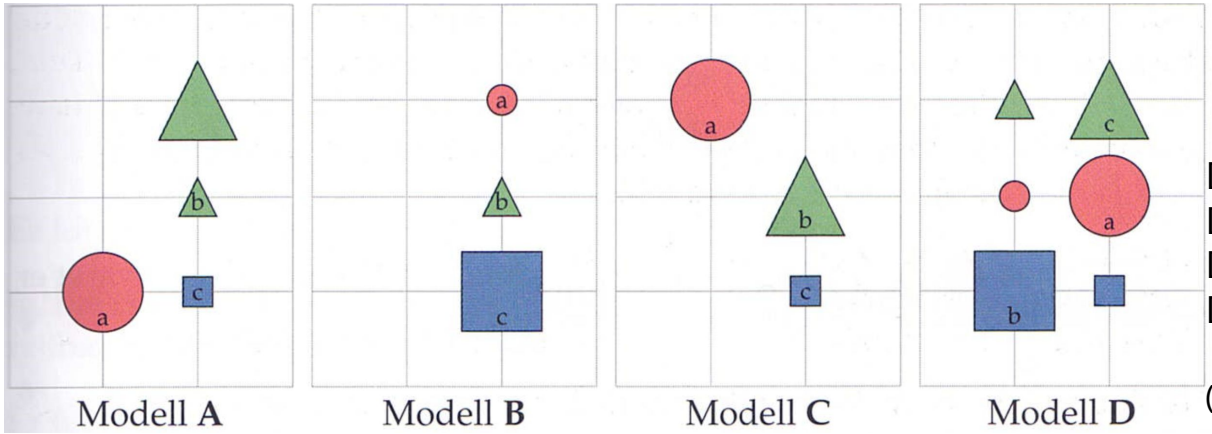
$\Leftrightarrow \forall x\forall y(Pa \wedge (Qx \vee Ry))$

- Bytter ut x med en annen variabel i den ene delen av formelen. Dette er fordi når alle står foran hele formelen, så må vi bruke forskjellige variabler for å skille.
- Videre er ekvivalens-regler for $\wedge$ og $\vee$ uttrykk brukt for å flytte ut kvantorene:
  - $\varphi \vee \forall x\psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$
  - $\varphi \wedge \forall x\psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$

Førsteordens logikk og modellering

- A ⊨ Over(b,a) ✅
- A ⊨ ¬Under(c,a) ✅
- B ⊨ VenstreFor(a,b) ❌

- B ⊨ ∃xLiten(x) ✅
- C ⊨ ∀xStor(x) ❌
- D ⊨ ∀x(Stor(x) → Sirkel(x)) ❌



Domene til A: {●, ■, ▲, ▲}
Domene til B: {●, ■, ▲}
Domene til C: {●, ■, ▲}
Domene til D: {●, ●, ■, ■, ▲, ▲}

(Trekantene skal helst være grønne)

Oppgaver

Oppgave

16.16 Se på formelen $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$.

(a) Spesifiser en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{1, 2, 3\}$ som gjør denne formelen *sann*. Forklar kort hvorfor modellen gjør formelen sann ved å referere til definisjonen av tolkningen av førsteordens formler.

(b) Kan R i forrige oppgave tolkes som en refleksiv relasjon? Hvis ja, forklar kort hvordan det er mulig; hvis nei, forklar hvorfor det ikke er mulig.

(c) Her er noen førsteordens formler. Sett $\Rightarrow$-piler som angir hvilke formler som er logiske konsekvenser av hverandre. Sett for eksempel en pil fra F til G hvis G er en logisk konsekvens av F. Det er ikke nødvendig å sette en pil fra en formel til seg selv.

$$\forall x(Px \vee Qx) \qquad \forall xPx \vee \forall xQx$$

$$\forall xPx \wedge \forall xQx \qquad \forall xPx$$

Løsning 16.16

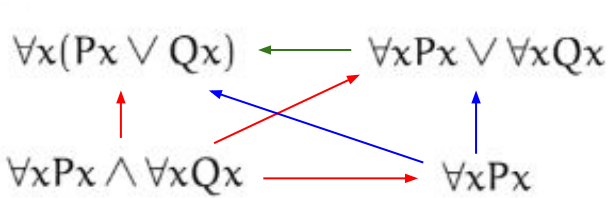
(a) La R^M = **{⟨1, 2⟩, ⟨2, 3⟩, ⟨3, 1⟩}**

- Vi ser at alle elementene i domenet relaterer til noe slik at Rxy er sann for alle x.
- Vi ser for alle disse tilfellene, er det ikke slik at Ryx er sann.

(b) Ja, R kan være en refleksiv relasjon.

- For eksempel R^M = **{⟨1, 2⟩, ⟨2, 3⟩, ⟨3, 1⟩, ⟨1, 1⟩, ⟨2, 2⟩, ⟨3, 3⟩}**
- Det er ingenting som sier at vi ikke kan ha tupler på formen **⟨x, x⟩**, så lenge formelen er oppfylt i tillegg.

(c)



Sant/Usant

La $\mathcal{M}$ være en førsteordens modell med domene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ slik at $R^{\mathcal{M}}$ er mengden

$$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}.$$

(a) $\mathcal{M} \models \forall x Rxx$ (Sant / Usant) ❌

(b) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryy)$ (Sant / Usant) ✅

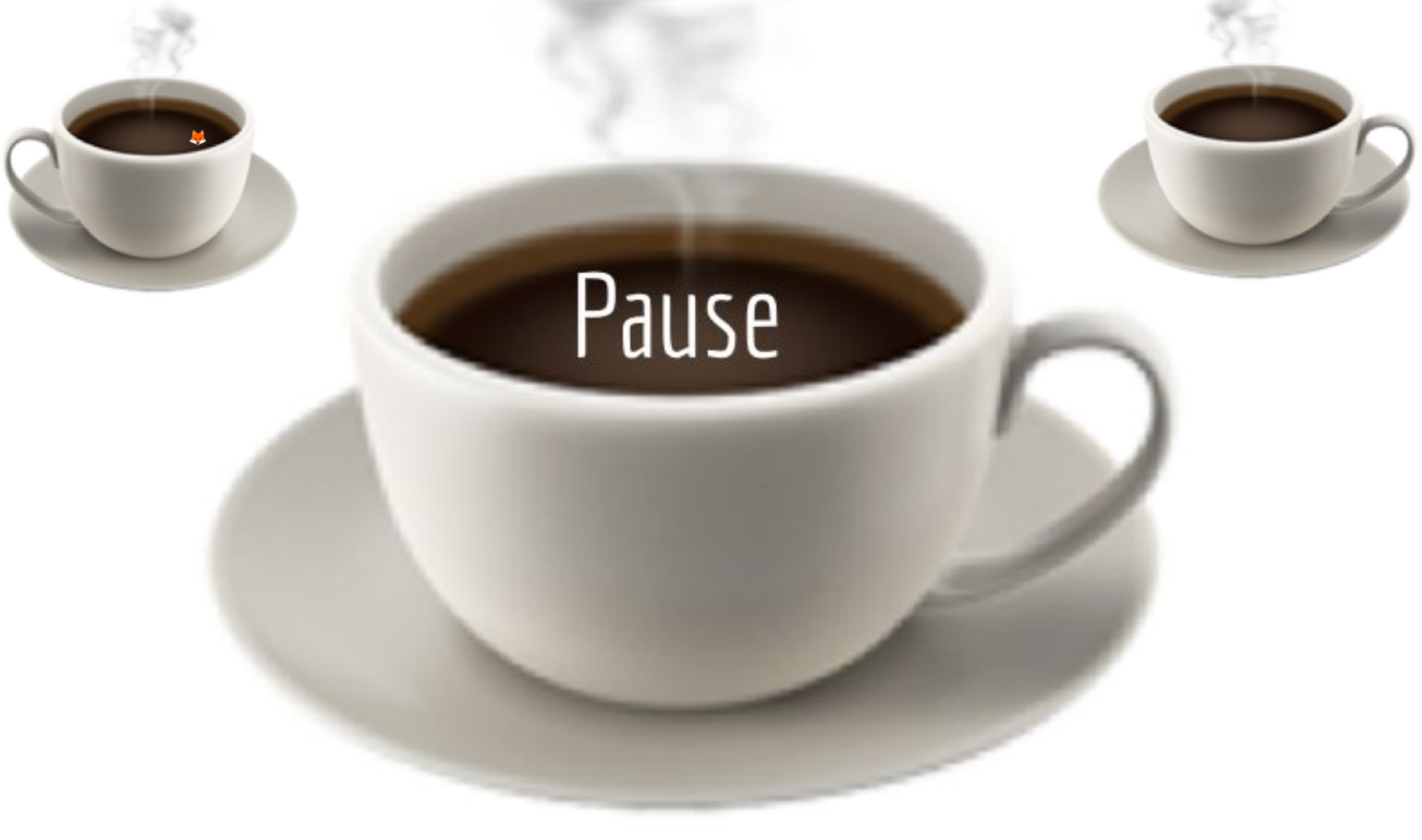
(c) $\mathcal{M} \models \exists x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$ (Sant / Usant) ✅

(d) $\mathcal{M} \models \neg \exists x \forall y Rxy$ (Sant / Usant) ✅

(e) Det finnes en modell som falsifiserer formelen $\forall x Px \rightarrow \exists x Px$. (Sant / Usant) ❌

(f) Formelen $\exists x \neg Px \vee \forall x Px$ er gyldig. (Sant / Usant) ✅

Eksamen v2019


Pause

Andre oppgaver som jeg ikke rekker å gå gjennom :)

15.10 For hver av følgende formler, gi en modell som gjør formelen sann. La domenet være $\{1, 2\}$. Det er tilstrekkelig å gi tolkningen av relasjonssymbolene R.

(a) $\forall x \forall y Rxy$

(b) $\exists x \forall y Rxy$

(c) $\forall x \exists y Rxy \wedge \neg \exists x Rxx$

(d) $\exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx) \wedge \forall x Rxx$

15.14 For hver av følgende formler, gi en modell som gjør formelen *usann*. La domenet være $\{1, 2, 3\}$. Det er tilstrekkelig å gi tolkningen av relasjonssymbolet R.

(a) $\forall x \forall y Rxy$

(b) $\exists x \forall y Rxy$

(c) $\forall x \exists y Rxy \wedge \neg \exists x Rxx$

(d) $\exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx) \wedge \forall x Rxx$

Oppgave

16.8 Avgjør hvilke av følgende formler som er logiske konsekvenser av hverandre:

$\exists x(Px \wedge Qx)$ $\exists x Px \wedge \exists x Qx$ $\exists x Px$ $\exists x Px \vee \exists x Qx$