Gruppetime 9

Abstraksjon og kombinatorikk



Planen

- 1 time: Gjennomgangen
- 2 time: Oblig eller hva du vil

Kapittel 17 - Ekvivalensklasser

- Kun for ekvivalensrelasjoner
  - Refleksiv, symmetrisk og transitiv
- *Ekvivalensklassen til et element x, er alle elementene som er relatert til x*
- Eksempel
  - S = {1, a, 3}
  - R = {<a, 3>, <3, a>, <3, 3>, <a, a>, <1, 1>}
- Ekvivalensklassene
  - [1] = {1}
  - [a] = {a, 3}
  - [3] = {a, 3}
- Kvotientmengden
  - S/R
  - {[1], [a], [3]}
  - {{a, 3}, {1}}



Kapittel 17 - Partisjoner

Definisjon 17.2 Partisjon

En **partisjon** (*eng: partition*) av en mengde S er en mengde X av ikke-tomme delmengder av S slik at følgende betingelser holder:

- Unionen av alle mengdene i X er lik S.
- Snittet mellom to forskjellige mengder fra X er tomt.

- En partisjon er da en mengde av mengder
- Ikke-tomme delmengder
    - {} er ikke lov å ha med i X.
- Unionen av alle mengdene i X er lik S
    - Alle elementene må være med
- Snittet mellom mengdene er tomt
    - Ingen elementer i S forekommer i mer enn en mengde i X
- Eksempel
    - S = {1, 2, 3}
    - X = {{1}, {2, 3}}
    - X = {{1,2}, {3}}
    - X = {{1,2,3}}

Kapittel 17 - Forfining av partisjoner

- X og Y er partisjoner av en mengde M.
- *X er en forfining av Y hvis hvert element i X er en delmengde av et element i Y*

- Eksempel 1
  - X = {{1, 3}, {2}, {4}}
  - Y = {{1, 3, 2}, {4}}
  - X er en forfining av Y
- Eksempel 2
  - X = {{1, 2}, {3, 4}}
  - Y = {{1, 3}, {2, 4}}
  - Er X en forfining av Y? ❌ Er Y en forfining av X? ❌
- Eksempel 3
  - X = {{1, 4}, {2, 3}}
  - Y = {{1, 4}, {2, 3}}
  - Er X en forfining av Y? ✅ Er X en forfining av Y ✅

Kapittel 18 - Kombinatorikk

- Inklusjons-og-eksklusjonsprinsippet
  - Legge til og trekke fra på en systematisk måte
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Multiplikasjonsprinsippet
  - En rekke uavhengige valg
  - Produktet av antall muligheter ved hvert valg
    - Antall bitstrenger av lenge 3.
      - $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
      - Vi har 2 valgmuligheter, og gjør 3 uavhengige valg
    - Antall “ord” av lengde 3
      - $29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^3 =$ 🤓
      - Vi har 29 valgmuligheter og gjør 3 uavhenige valg

Kapittel 18 - Kombinatorikk

- Permutasjon
  - En permutasjon av en mengde er en ordning av elementene i den.
  - En endring av rekkefølgen på elementene gir en ny permutasjon
  - Antall permutasjoner for n elementer er n!
- Ordnet utvalg, k-permutasjon
  - Du skal velge k elementer fra n mulige, der rekkefølgen spiller en rolle
  - $${}^nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$
- Kombinasjon
  - Du skal velge k elementer fra n mulige, der rekkefølgen ikke spiller noen rolle
  - **Binomialkoeffisient**
  - $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$
  - Legg merke til at $\binom{n}{k}$ er det samme som $\binom{n}{n-k}$

- M = {a,b,c} :
  - abc, acb,
    bac, bca,
    cab, cba
- Velg to elementer fra M:
  - Rekkefølge:

    $$\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$
  - Ikke rekkefølge:

    $$\frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{6}{2} = 3$$

Oppgaver kapittel 17

17.13

Avgjør om følgende mengder kan være partisjoner. Hvis det er slik, hva er ekvivalensrelasjonen som gir opphav til denne partisjonen?

(a) $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (b) $\{\{1\},\{2,3\}\}$ (c) $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$

Løsning 17.13

Antar M = {1,2,3}

a) {{1}, {2}, {3}}
   i) En partisjon av M
   ii) Ekvialensrelasjonen: {<1,1>, <2,2>, <3,3>}

b) {{1}, {2, 3}}
   i) En partisjon av M
   ii) Ekvialensrelasjonen: {<1,1>, <2,2>, <3,3>, <2,3>, <3,2>}

c) {{1, 2}, {2, 3}}
   i) Ikke en partisjon, snittet er ikke tomt.

Oppgaver kapittel 17

17.9

La x ~ y bety at *x er like gammel som y*.

- Vis at dette er en ekvivalensrelasjon
- Hva er ekvivalensklassene?

Vi kan la ~ være en relasjon på mengden alle mennesker.

For at dette skal være en ekvivalensrelasjon må den være *refleksiv*, *symmetrisk* og *transitiv*.

- Refleksiv: Alle er like gammel som seg selv, derfor må alle være relatert til seg selv
- Symmetrisk: Hvis x er like gammel som y, må også y være like gammel som x
- Transitiv: Hvis x er like gammel som y, og y er like gammel som z, må x og z også være like gamle.

Siden relasjonen er refleksiv, transitiv og symmetrisk, er det en ekvialensrelasjon.

Det vil være en ekvivalensklasse for hver alder. Hver ekvivalensklasse vil være mengden av alle personer med denne alderen.

Hvordan vise at noe er en ekvivalensrelasjon? 🧐

- Vit hva en ekvivalensrelasjon er
  - En relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv
- Vit hvordan relasjonen er definert
  - Hva skal til for at to elementer er relatert til hverandre
  - Hva vet du om elementene dersom du vet at de er relatert til hverandre?

- Vis at relasjonen er refleksiv
  - Hva må til for at et element x relaterer til seg selv?
  - Har ethvert element x denne egenskapen?
  - Hvorfor kan du vite det?
- Vis at relasjonen er symmetrisk
  - Anta *a relatert til b*
  - Hva vet du om a og b ut fra denne antagelsen (se på definisjonen til relasjonen)
  - Bruk denne informasjonen til å argumentere for at *b er relatert til a*.
- Vis at relasjonen er transitiv
  - Anta at *a er relatert til b og at b er relatert til c*
  - Hva vet du om a, b og c ut fra denne antagelsen (se på definisjonen til relasjonen)
  - Bruk denne informasjonen til å argumentere for at *a er relatert til c*.

Oppgaver kapittel 18

Oppgave

18.10 (a) Hvor mange forskjellige strenger kan vi få ved å stokke om på tegnene i strengen `LOLOLOL`?

(b) Hvor mange forskjellige strenger kan vi lage ved hjelp av én `0`, én `1`-er, to `2`-ere og tre `3`-ere? Forklar kort hvordan du regner ut svaret.

Løsning 18.10

(a) LOLOLOL består av 7 tegn, 3 O-er og 4 L-er.

- Dersom alle 7 tegnene hadde vært forskjellige, ville vi hatt 7! Måter å stokke dem om på.
- Siden noen er like, må vi kompensere for overtelling.
  - Det er 3! måter å stokke om 3 O-er på
  - Det er 4! måter å stokke om 4 L-er på
- Vi får da 7! / (3! * 4!)

(b) 0122333, vi har totalt 7 tegn

- Det er 7! Måter å stokke om 7 tegn på.
- Vi må kompensere for overtelling
  - 2! måter å stokke om 2 2-ere på
  - 3! måter å stokke om 3 3-ere på
- Totalt 7! / (2! * 3!)

Oppgaver kapittel 18

Oppgave

18.11 La L være språket $\{a, b, c\}^*$ som består av alle strenger over alfabetet $\{a, b, c\}$.

(a) Hvor mange strenger i L har lengde 4?
(b) Hvor mange strenger i L har lengde 5?
(c) Hvor mange strenger i L med lengde 5 har minst to forekomster av a?

Løsning 18.11

(a) Vi har 3 mulige tegn, og fire uavhengige valg. Da får vi 3^4 mulige strenger.

(b) Vi har 3 mulige tegn, og fem uavhengige valg. Da får vi 3^5 mulige strenger.

(c) Vi vet at det er $3^5 = 243$ mulige strenger på 5 tegn.

- Blant disse finnes alle strenger med 2 eller flere forekomster av a, i tillegg til alle strenger med færre enn to forekomster av a.
  - Vi ønsker å finne ut hvor mange muligheter vi må fjerne fra totalen.
  - Altså alle strenger med 0 eller 1 forekomst av a.
- Antall strenger med 0 forekomster av a-er tilsvarer å fjerne a som et mulig tegn,
  - Vi får derfor 2 mulige tegn, og 5 uavhengige valg.
  - Totalt $2^5 = 32$ mulige strenger med 0 forekomster av a
- Antall strenger med 1 forekomst av a, vil si at vi reserverer 1 plass til a, også har vi 4 uavhengige valg med 2 mulige tegn for de andre plassene.
  - Det finnes 5 forskjellige steder å plasere a-en.
  - Da får vi $5 * 2^4 = 5 * 16 = 80$ muligheter.
- Nå vet vi hvor mange strenger det finnes totalt, og hvor mange av dem som ikke har 2 eller flere forekomster av a.
- Da kan vi trekke dette fra totalen: 243 - (32 + 80) = 131

Burde vi snakke om disse oppgavene fra obligen?

Oppgave 2. La $\oplus$ være relasjonen på heltallene $\mathbb{Z}$ slik at $a \oplus b$ dersom a og b har samme fortegn. Altså vil $a \oplus b$ dersom $a \geqslant 0$ **og** $b \geqslant 0$, eller dersom $a < 0$ **og** $b < 0$. For eksempel har vi at $-2 \oplus -3$, men ikke $2 \oplus -3$.

(a) Vis at relasjonen $\oplus$ er en ekvivalensrelasjon, det vil si at relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) Hvor mange ekvivalensklasser har heltallene $\mathbb{Z}$ under relasjonen $\oplus$? Hvordan ser disse ekvivalensklassene ut?

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\oplus$ ved å skrive `\oplus`.)

Oppgave 3. La M være mengden $\{a, b, c, d\}$.

(a) Hvor mange partisjoner P av M finnes det slik at $|P| = 3$? Det vil si, hvor mange partisjoner av M har nøyaktig tre elementer? Hint: Lag en liste over alle partisjonene.
(b) La $\gtrless$ være relasjonen på partisjoner av M slik at $P \gtrless Q$ dersom $|P| = |Q|$. Det vil si, dersom P og Q er partisjoner av M og $|P| = |Q|$, så vil $P \gtrless Q$. Bevis at $\gtrless$ er en ekvivalensrelasjon.

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\gtrless$ ved å skrive `\gtrless`.)

Oppgave 4. La M og $\gtrless$ være definert som i forrige oppgave.

(a) Hva er ekvivalensklassen til $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$?
(b) Hvor mange forskjellige ekvivalensklasser finnes det for ekvivivalensrelasjonen $\gtrless$? Hva er det som skiller én ekvivalensklasse fra en annen?

Oppgave 2:

- Relasjonen heter $\oplus$, dette er bare et navn
- Relasjon på mengen av heltall,
  {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ... }
- Hva betyr a$\oplus$b?
  - At a er relatert til b, altså at <a,b> er et element i relasjonen $\oplus$.
- $\oplus$ = {... <-2, -3>, <100, 200>, <1, 35>, <-100, -4>...}
- Husker du hva en ekvialensklasse er?
  - Hvis nei: Bla frem definisjonen

Oppgave 3 og 4:

- Husker du hva en partisjon er?
  - Hvis nei: Bla frem definisjonen
- Ikke la deg skremme av at relasjonen heter $\gtrless$, dette er bare et navn
- $\gtrless$ er en relasjon som relaterer partisjoner. Det vil si at hvert element er en *mengde med mengder.*
- {{a,b}, {c,d}} $\gtrless$ {{a,c}, {b,d}} fordi begge disse mengdene (partisjonene) inneholder to elementer (som også er mengder).


Pause

6 Partisjoner og kombinatorikk

6.1 sant
Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på $\{a, b, c, d, e\}$ slik at ekvivalensklassene er $\{a, d, e\}$ og $\{b, c\}$. Da vil $d \sim e$.

6.2 usant
Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på mengden M. Husk at $[x]$, hvor $x \in M$, står for ekvivalensklassen til x. Hvis $[x] = [y]$, må det være slik at $x = y$.

6.3 usant
Den tomme mengden er en partisjon av $\{1, 2, 3\}$.

6.4 usant
Det finnes nøyaktig tolv delmengder av mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.5 sant
Det finnes nøyaktig åtte funksjoner fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2\}$.

6.6 sant
Det finnes nøyaktig 24 bijektive funksjoner fra $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.7 sant
Det er mer enn femti forskjellige permutasjoner av strengen `001122`.

6.8 sant
Antall permutasjoner av en mengde med n elementer er $n!$.

6.9 sant
Antall funksjoner fra en mengde med k elementer til en mengde med n elementer er n^k.

6.10 sant
Antall injektive funksjoner fra en mengde med n elementer til en mengde med n elementer er $n!$.