Repetisjonstime

Kapittel 1-8

Hva skal vi bruke denne timen til?

1. time

- “Hva vil du?”-menti 7734 6326
- Menti-quiz
- Jeg går gjennom oppgaver/tema på etterspørsel
  - Tidligere oblig-oppgaver 🧐
  - Eksamensoppgaver 🧐
  - Oppgaver fra boka 🧐

2. time

- I utgangspunktet satt av til selvstendig jobbing
- Kan gjøre noe annet hvis ingen vil jobbe 🤓

Menti først – 5177 5193

12 Mengdelære [10 poeng]

La A være mengden $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(a) [2 poeng] Hva er $\mathcal{P}(A)$?

(c) [2 poeng] Hva kardinaliteten til $A \cup \mathcal{P}(A)$?

(d) [2 poeng] Er det slik at $\emptyset \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$?

Mengdelære

A = {Ø, {Ø}}

a) Hva er P(A)?
   i) Her er det mye mengder i mengder, for å unngå i gå i krøll her så gjør jeg det litt lettere for meg selv.
   ii) A har to elementer i seg, ⌀ og **{⌀}**. Jeg kaller disse midlertidig for 🔴 og 🔵 .
   iii) P({ 🔴 , 🔵 }) = **{**⌀, { 🔴 }, { 🔵 }, { 🔴 , 🔵 } **}**
   iv) P({ ⌀ , **{⌀}**}) = **{** ⌀, { ⌀ }, { **{⌀}** }, { ⌀, **{⌀}** } **}**
   v) 💡 Viktig å huske å sette tilbake de originale elementene før man leverer 💡

c) Kardinaliteten til A ∪ P(A)
   i) A ∪ P(A) = P(A) ; Siden både ⌀ og **{⌀}** er elementer i P(A).
   ii) P(A) har 4 elementer i seg.

e) ⌀ er et element i *alle* potensmengder, svaret er derfor ja.

1 Utsagnslogikk [10 poeng]

(a) [2 poeng] Finn en valuasjon som oppfyller følgende mengde av utsagnslogiske formler:

$$\{P \vee Q, \quad Q \to \neg P, \quad P \to R, \quad Q \to S, \quad \neg S\}$$

(b) [2 poeng] Hvilke av følgende formler er slik at de har $P \vee (Q \to R)$ som en logisk konsekvens?

P Q R $P \wedge Q$ $Q \wedge R$ $P \wedge R$

(c) [3 poeng] Er $P \to R$ en logisk konsekvens av $(P \to Q) \to (Q \to R)$? Hvis ja, forklar hvorfor; hvis nei, forklar hvorfor ikke, og gi et moteksempel.

(d) [3 poeng] Er formlene $Q \to R$ og $(P \to Q) \to (Q \to R)$ ekvivalente? Hvis ja, forklar hvorfor; hvis nei, forklar hvorfor ikke, og gi et moteksempel.

Utsagnslogikk

a) Start med de enkeste formlene og jobb deg gjennom
   i) Vi ser at ¬S må være sann. Det betyr at **S må være usann**.
   ii) Siden S er usann, må **Q være usann** for at (Q → S) skal være sann.
   iii) Siden Q er usann, må **P være sann** for at (P ∨ Q) skal være sann.
   iv) Nå vil (Q → ¬P) være sann fordi både Q og ¬P er usanne.
   v) Siden P er sann, må **R være sann** for at (P → R) skal være sann

b) Dersom enten P eller R er sanne, vil denne formelen være sann. Eneste formelen som ikke tvinger P eller R sann er Q. Dermed er (P ∨ (Q → R)) en logisk konsekvens av alle formlene utenom Q.

c) Vi lar F = (P → Q) → (Q → R) og G = P → R
Kan vi gjøre F sann, og G usann? Vi prøver!
   i) For å gjøre G usann, må P være sann, og R være usann.
   ii) Dersom Q er sann, vil F bli usann (vi ser derfor bort fra dette tilfellet)
   iii) Dersom Q er usann, vil (P → Q) være usann, og (Q → R) være sann. Dette vil gjøre F sann.
   iv) Dette betyr at F ikke er en logisk konsekvens av G.

d) For å sjekke om de er ekvivalente kan vi sjekke om de er logsik konsekvens av hverandre.
   i) La F = Q → R og G = (P → Q) → (Q → R). Legg merke til at G kan også skrives som (P → Q) → F
   ii) Anta at F er sann, da må G også være sann, fordi det er slik vi tolker →.
   iii) Anta at G er sann, det vi må vise nå er at vi ikke kan ha tilfellet Q sann og R usann.
   iv) Dersom Q er usann er ikke dette tilfellet.
   v) Dersom Q er sann, vil (P → Q) være sann, da må også (Q → R) være sann fordi det er slik vi tolker →.

1 Bevis og begrunnelser [10 poeng]

I denne oppgaven får du to nye definisjoner som du skal bruke til å lage bevis og gi begrunnelser. Fokuset i denne oppgaven er altså på bevisene og begrunnelse du gir. Pass på at deloppgavene (a), (b), (c) og (d) er ført inn hver for seg, helt uavhengig av hverandre og i riktig rekkefølge. Det du skriver i én deloppgave får ingenting å si for det du skriver en i annen deloppgave.

En funksjon $f : A \to B$ er **dobbelt-surjektiv** hvis det for alle $y \in B$ finnes to forskjellige elementer x_1 og x_2 i A slik at $f(x_1) = y$ og $f(x_2) = y$. En funksjon $f : A \to B$ er **semi-injektiv** hvis det for alle mengder $\{x, y, z\} \subseteq A$ med tre elementer er slik at $\{f(x), f(y), f(z)\}$ har minst to elementer. Sagt på en annen måte: Hvis x, y og z er tre forskjellige elementer i A, så vil $|\{f(x), f(y), f(z)\}| \neq 1$.

(a) [3 poeng] Bevis at hvis en funksjon f er injektiv, så er den semi-injektiv.

(b) [2 poeng] Bevis at en funksjon f kan være semi-injektiv uten å være injektiv.

(c) [3 poeng] Bevis at hvis en funksjon f er dobbelt-surjektiv, så er den surjektiv.

(d) [2 poeng] Bevis at en funksjon f kan være surjektiv uten å være dobbelt-surjektiv.

Bevis og begrunnelser

a) Anta at vi har en injektiv funksjon f: A → B.
Anta at {x,y,z} ⊆ A, der x, y og z er 3 forskjellige elementer fra A.
Siden f er injektiv og x ≠ y ≠ z, så vet vi at f(x) ≠ f(y) ≠ f(z), per definisjon av injektiv. Da må {f(x), f(y), f(z)} bestå av 3 elementer, og 3 elementer er mer enn 2. Dermed er den per definisjon semi-injektiv.

b) Her skal vi bevise at noe finnes, dermed holder det med et eksistensbevis.
La A = {1, 2, 3}
f: A → A slik at f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2
Funksjonen er semi-injektiv fordi {f(1), f(2), f(3)} = {1,2}, som inneholder 2 elementer.
Funksjonen er ikke injektiv fordi f(2) = f(3) = 2.

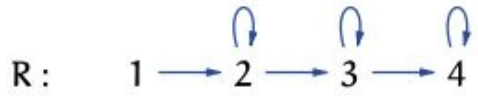
c) Anta at vi har en dobbelt-surjektiv funksjon f: A → B.
La y være et vilkårlig element i B (verdiområdet).
For at f skal være surjektiv, må det finnes et element x ∈ A, slik at f(x) = y.
Siden f er dobbelt surjektiv, vet vi at det finnes to elementer x1 og x2 ∈ A, slik at f(x1) = y og f(x2) = y.

d) La A = {1}. La f: A → A, der f(1) = 1.
F er surjektiv siden, men ikke dobbelt surjektiv.

13 Relasjoner [10 poeng]

La relasjonene R og S, begge på mengden $\{1, 2, 3, 4\}$, være definert på følgende måte:

R :



R = {<1,2>, <2,2>, <2,3>, <3,3>, <3,4>, <4,4>}

S :



S = {<2,1>, <2,2>, <3,2>, <3,3>, <4,3>, <4,4>}

La $T = R \cup S$.

T = R ∪ S = {<1,2>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,3>, <4,4>}

(a) [2 poeng] Er R en partiell ordning?

(b) [2 poeng] Er T transitiv?

(c) [2 poeng] Er T symmetrisk?

(d) [2 poeng] Er T anti-symmetrisk?

Relasjoner

R = {<1,2>, <2,2>, <2,3>, <3,3>, <3,4>, <4,4>}

S = {<2,1>, <2,2>, <3,2>, <3,3>, <4,3>, <4,4>}

T = R ∪ S = {<1,2>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,3>, <4,4>}

a) Er R en partiell ordning?
   i) Refleksiv ❌ (<1,1> ∉ R)
   ii) Transitiv ❌ (<1,2> og <2,3> ∈ R, men <1,3> ∉ R)
   iii) Anti-symmetrisk ✅

b) Er T transitiv?
   i) Nei, <1,2> og <2,3> ∈ R, men <1,3> ∉ R

c) Er T symmetrisk?
   i) Ja

d) Er T anti-symmetrisk?
   i) Nei, <1,2> og <2,1> ∈ T, men 1 ≠ 2

3 Relasjoner [10 poeng]

Vi sier at en binær relasjon R på M er **ekvitransitiv** hvis det for alle x, y og z er slik at hvis $\langle x, z\rangle \in R$ og $\langle y, z\rangle \in R$, så $\langle x, y\rangle \in R$. La M være mengden $\{a, b, c\}$. I alle oppgavene nedenfor skal relasjonene defineres som mengder av tupler. I oppgave (a)–(c) forsøk å finne relasjoner med så få tupler som mulig. Hint: Relasjonen $\{\langle a, b\rangle\}$ er *ikke* ekvitransitiv, fordi $\langle a, a\rangle$ mangler.

(a) [2 poeng] Finn en relasjon på M som er ekvitransitiv, men *ikke* symmetrisk.
(b) [2 poeng] Finn en relasjon på M som er refleksiv og symmetrisk, men *ikke* ekvitransitiv.
(c) [2 poeng] Finn en relasjon på M som er ekvitransitiv, men *ikke* transitiv.
(d) [4 poeng] Vis at dersom en relasjon er både symmetrisk og transitiv, så er den ekvitransitiv.

Relasjoner

M = {a, b, c}

Vi sier at en binær relasjon R på M er ***ekvitransitiv*** hvis det for alle x, y og z er slik at hvis ⟨x, z⟩ ∈ R og ⟨y, z⟩ ∈ R, så ⟨x, y⟩ ∈ R.

- *Med ord: Hvis to (like eller forskjellige) elementer (x og y) er relatert til samme element (z), må disse to elementene også være relatert til hverandre.*

a) Ekvitransitiv, men ikke symmetrisk.
   i) {<a,a>, <a,b>} (Vi har <a,b> og <a,b>, derfor må <a,a> være med)

b) Refleksiv, symmetrisk, men ikke ekvitransitiv
   i) Refleksiv: {<a,a>, <b,b>, <c,c>} ; Også symmetrisk ✅ men ekvitransitiv ❌
   ii) For å ikke ødelegge symmetri, kan vi bare legge til par av tupler
   iii) {<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,a> } ; sjekk om denne er ekvitransitiv (den er det ❌)
   iv) {<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,a>, <a,c>, <c, a>} ; legger til et par til
   v) {<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,a>, <a,c>, <c, a>} ; Alle egenskapene holder ✅

c) Ekvitransitiv, men ikke transitiv
   i) {<a,a>, <a, b>} ; Minste ikke-tomme mengden som er ekvitransitiv ✅ , men også transitiv ❌
   ii) {<a,a>, <a, b>, <b, a>, <b,b> } ; Fortsatt ekvitransitiv ✅ , men også fortsatt transitiv ❌
   iii) {<a,a>, <a, b>, <b, a>, <b,b>, <b,c> } ;
      1) Fortsatt ekvitransitiv (fordi ingenting annet er relatert til c, og <b,b> er allerede med ✅
      2) Ikke transitiv fordi <a,b> og <b,c> er med, men ikke <a,c> ✅

d) Anta at en relasjon R på en mengde M er symmetrisk og transitiv. Vi skal vise at den også blir ekvitransitiv.
   i) Anta at ⟨x, z⟩ og ⟨y, z⟩ er med. Målet er å vise at da må også ⟨x, y⟩ må være med. (definisjon av ekvitransitivitet holder)
   ii) Siden R er symmetrisk og ⟨y, z⟩ er med, må ⟨z, y⟩ være med.
   iii) Siden den er transitiv og ⟨x, z⟩ og ⟨z, y⟩ er med, må ⟨x, y⟩ være med. Da er den per definisjon ekvitransitiv.