

IN1150 – Logiske metoder: Innleveringsoppgave 7

Frist: torsdag 24. mars 2022, kl. 23.59

Oppgave 1. La en signatur være $\langle a, b; f, g; P, R, Q \rangle$, der ariteten til f og P er én, ariteten til g og R er to, og ariteten til Q er null. Avgjør om følgende uttrykk er førsteordens *termer* eller ikke, ved å følge definisjonen av termer til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Du trenger ikke å begrunne svaret ditt.

- | | | |
|------------------------|---------------------------|----------------------|
| (a) $h(a)$ | (e) $f(a, b)$ | (i) $g(f(a), y)$ |
| (b) $P(x)$ | (f) $g(x, a)$ | (j) Q |
| (c) (a) | (g) a | (k) $\forall x f(x)$ |
| (d) $f(f(g(a, f(a))))$ | (h) $g(g(g(a, b), b), b)$ | (l) $f(x$ |

Oppgave 2. La signaturen være den samme som i forrige oppgave. Avgjør om følgende uttrykk er førsteordens *formler* eller ikke, ved å følge definisjonen av formler til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Du trenger ikke å begrunne svaret ditt.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $P(x)\forall x R(x, b)$ | (g) $\neg x \exists y (P(a) \rightarrow R(x, y))$ | (m) $g(f(a), y)$ |
| (b) $R(f(a), x)$ | (h) $(P(a))$ | (n) $(P(b) \rightarrow \forall x R(x, a))$ |
| (c) $\exists x \forall y (R(x, y) \wedge P(a))$ | (i) $\forall x \rightarrow (P(x) \vee R(x, a))$ | (o) $\forall x P(y)$ |
| (d) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$ | (j) Q | (p) $(P(a) \wedge Q)$ |
| (e) $\forall x$ | (k) $P(a)$ | |
| (f) $g(x, a)$ | (l) $(\neg(\neg(\neg(Pa))))$ | |

Oppgave 3. Formlene under har ingen parenteser, men på grunn av presedensreglene kan vi tolke dem presist. Sett alle parenteser og kommaer på rett plass slik at formelene og termene er korrekte. Alle formelene og termene skal være i tråd med de induktivt definerte mengdene av førsteordens formler og termer. Ingenting annet skal endres, og betydning ikke forandres.

- | | |
|---|--|
| (a) $Rxy \rightarrow Pa \wedge \neg \forall x Px$ | (b) $\exists x \forall y \neg Px \vee Rxy$ |
|---|--|

Oppgave 4. Vi har lov til å droppe parenteser når vi skriver termer, men det må i så fall være helt entydig hva termene betyr. For eksempel skriver vi ofte hha i stedet for $h(h(a))$. Det er nokså uproblematisk, særlig om vi på forhånd vet hva ariteten til alle symbolene er. Men, se på følgende term med fire symboler. Den kan tolkes på tre forskjellige forskjellige måter, avhengig av *ariteten* til de ulike symbolene. Vi antar at vi bruker prefiksnotasjon her. Forklar og finn de tre måtene å tolke termen på.

free

Oppgave 5. Anta a , b og c er konstantsymboler som tolkes som Arne, Bjarne og Carl. Anta vi har relasjonssymbolene P , U , S og F der Px tolkes som x er populær, Ux tolkes som x er usikker, Sxy tolkes som x er sjalu på y og Fxy tolkes som x er forelsket i y . Finn førsteordens formuler som representerer følgende utsagn:

- (a) Bjarne er usikker.
- (b) Carl er sjalu på noen.
- (c) Carl er forelsket i Arne, men ikke i Bjarne.
- (d) Alle er forelsket i noen.
- (e) Arne er sjalu på noen som både er usikker og populær.
- (f) Ingen er forelsket i Carl.
- (g) Arne er sjalu på alle, men Bjarne er ikke det.
- (h) De som er forelsket i seg selv er populære, men usikre.
- (i) (Ekstra:) Alle er sjalu på de som er forelsket i noen som de selv er forelsket i.

Oppgave 6. Anta at konstantsymbolene a , b og c tolkes som Astrid, Bodil og Camilla. Anta at K , O , S og F er relasjonssymboler slik at Kx tolkes som x har et stort kontor, Ox tolkes som x jobber overtid, Sxy tolkes som x er sjefen til y og Fxy tolkes som x er flinkere enn y . Finn gode og naturlige norske setninger for følgende førsteordens formuler.

- | | |
|---|---|
| (a) $(Kb \wedge \neg Oa)$ | (e) $\forall x \exists y Fyx$ |
| (b) $\forall x Ox$ | (f) $(\forall x Scx \wedge \exists y Ky)$ |
| (c) $\exists x (Ox \wedge Sxc)$ | (g) $\exists x \forall y (Oy \rightarrow Fxy)$ |
| (d) $\forall x (Fbx \rightarrow \neg Kx)$ | (h) $\forall x \forall y (Sxy \rightarrow \exists z Szx)$ |

Oppgave 7. Avgjør om følgende formuler er lukkede eller ikke. Hvis de ikke er det, oppgi de frie variablene. Kun a og b er konstantsymboler.

- | | |
|--|---|
| (a) $\forall x (Px \wedge \neg Px)$ | (e) $\forall x (Py \wedge \neg Px)$ |
| (b) $\forall x Pa$ | (f) $(\forall x Px \wedge Qx)$ |
| (c) $\exists x \exists y Px \vee Py$ | (g) $Pa \rightarrow Px$ |
| (d) $\forall x \exists y (Rxy \rightarrow \neg \exists z Ryb)$ | (h) $\forall x \forall y \forall x (Rxy \rightarrow Ryx)$ |

Oppgave 8. La Fx bety at « x er en forsker». Kan vi uttrykke følgende påstander med førsteordens formuler, hvor vi kun har lov til å bruke F , og eventuelt $=$, som relasjonssymboler? Hvis ja, finn passende førsteordens formuler; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

- (a) Det finnes to personer som er forskere.
- (b) Det finnes nøyaktig én forsker.