

IN1150 – Logiske metoder: Innleveringsoppgave 11

Frist: torsdag 28. april 2022, kl. 23.59

Oppgave 1. Anta at vi har en enkel graf G med nodene $V = \{a, b, c, d, e\}$ og kantene $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{e, c\}, \{e, b\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.

- (a) Tegn denne grafen.
- (b) Er dette en komplett graf? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hva mangler?
- (c) Hva er nodene og kantene til $\bar{G}$, komplementet til G ?

Oppgave 2.

- (a) Finn en *rettet* graf med nøyaktig fire noder og tre kanter, og definer denne presist som en mengde noder og kanter. Tegn deretter grafen.
- (b) Anta at en enkel, rettet graf har nodene $\{a, b, c\}$. Hvor mange forskjellige rettede grafer kan denne gi opphav til? Du trenger kun å oppgi tallet. (Vi tillater altså ikke løkker eller parallelle kanter, men to noder kan ha to kanter mellom seg dersom de har forskjellig retning.)
- (c) Hva er svaret på (b) dersom vi ikke tillater at to noder har to kanter mellom seg?
- (d) Hva er svaret på (b) for en graf med n noder (hvor $n \geq 2$)?

Oppgave 3.

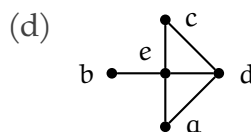
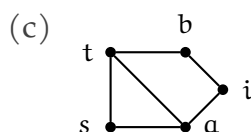
- (a) Hva er summen av gradene i en graf med fem noder og tre kanter?
- (b) Hva er summen av gradene i en graf med tre noder og fem kanter?
- (c) Hva er summen av gradene i K_4 , den komplette grafen med fire noder?
- (d) Hva er summen av gradene til $\bar{K}_5$, komplementet til K_5 ?

Oppgave 4. La G være grafen med nodene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og kantene

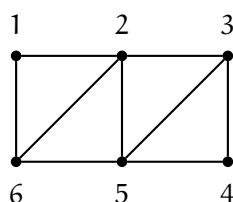
$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

For hver av grafene nedenfor, avgjør om denne grafen er isomorf med G . Hvis den er det, gi en isomorfi fra G til grafen. Hvis ikke, forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

- (a) Grafen med noder $\{a, b, c, d\}$ og kanter $\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, c\}\}$.
- (b) Grafen med noder $\{e, f, s, o, i\}$ og kanter $\{\{o, s\}, \{f, s\}, \{i, f\}, \{e, i\}, \{o, e\}, \{o, f\}\}$.

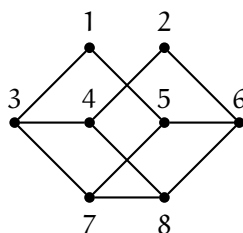


Oppgave 5. Se på følgende graf.



- (a) Har denne grafen en *eulerkrets* eller en *eulervei*? Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.
- (b) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*? Hvis ja, gi minst ett eksempel.

Oppgave 6. Se på følgende graf.



- (a) Har denne grafen en *eulerkrets* eller en *eulervei*? Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.
- (b) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*? Hvis ja, gi minst ett eksempel.

Oppgave 7. La $u \rightsquigarrow v$ bety at det finnes en *sti* fra u til v , for en gitt urettet graf. Bevis at $\rightsquigarrow$ er en *ekvivalensrelasjon*, det vil si at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Forklar kort hvordan ekvivalensklassene ser ut. (Legg merke til at det står *sti* og ikke *vandring* her. Dersom du bruker $\LaTeX$, får du $\rightsquigarrow$ ved å skrive `\leftrightsquigarrow`.)

Oppgave 8.

- (a) Anta at T_1 og T_2 er trær. La N_1 og N_2 stå for nodene og E_1 og E_2 stå for kantene i disse trærne. Anta at N_1 og N_2 ikke har noen noder til felles og at E_1 og E_2 ikke har noen kanter til felles. La $n_1 \in N_1$ og $n_2 \in N_2$. La T være grafen som består av nodene $N_1 \cup N_2$ og kantene $E_1 \cup E_2$ i tillegg til kanten $\{n_1, n_2\}$. Vis at T er et tre.
- (b) Bevis at alle komplette grafer med minst tre noder har en hamiltonsykel.