Eksamen 2020 høst - oppgave 5 (kapittel 9, 10)

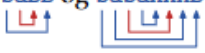
5 Induksjon og rekursjon [20 poeng]

La A være alfabetet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{A}, \texttt{B}\}$. En **lovlig** streng er en streng som begynner med kun små bokstaver og som ender med kun store bokstaver, når vi leser strengen fra venstre mot høyre, og hvor det er *like mange* små og store bokstaver.

- Noen eksempler på lovlige strenger er `aB`, `baBB`, `babaAAAB` og `aabbaBBAAB`.
- Noen eksempler på ulovlige strenger er `aaB`, `BAba`, `aBbB`, `BAba` og `aaBBAA`.

Tenk på bokstavene som parenteser som balanserer hverandre i par. Vi kan visualisere dette med piler på følgende måte. Her går det en altså pil mellom bokstavene som balanserer hverandre:

Strengene `baBB` og `babaAAAB` er lovlige.



Videre sier vi at `a` og `A` er av samme **type** og at `b` og `B` er av samme **type**. I strengen `baBB` består det ytterste paret av `b` og `B`, som er av samme type, og det innerste paret består av `a` og `B`, som er av forskjellig type.

(a) [6 poeng] Gi en induktiv definisjon av mengden M av lovlige strenger.

(b) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $N : M \to \mathbb{N}$ som teller antall par av bokstaver i en streng i M. For eksempel har vi at $N(\texttt{babaAAAB}) = 4$.

(c) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen B som for en streng i M teller antall venstrebokstaver som balanseres av en høyrebokstav av samme type. For eksempel har vi at $B(\texttt{babaAAAB}) = 3$.

(d) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen U som for en streng i M teller antall venstrebokstaver som balanseres av en høyrebokstav som *ikke* er av samme type. For eksempel har vi at $U(\texttt{babaAAAB}) = 1$.

Eksamen 2021 høsten - oppgave 4 (kapittel 12)

4 Utsagnslogikk og strukturell induksjon [10 poeng]

Vi definerer mengden O av **oppformler** induktivt som den minste mengden slik at:

- Hvis F er en atomær utsagnslogisk formel, så er $F \in O$.
- Hvis $F \in O$, så er $\neg F \in O$.
- Hvis $F \in O$ og $G \in O$, så er $(F \wedge G) \in O$.

Vi definerer mengden N av **nedformler** induktivt som den minste mengden slik at:

- Hvis F er en atomær utsagnslogisk formel, så er $F \in N$.
- Hvis $F \in N$, så er $\neg F \in N$.
- Hvis $F \in N$ og $G \in N$, så er $(F \vee G) \in N$.

(a) [1 poeng] Vis at O *ikke* er en delmengde av N.
(b) [1 poeng] Vis at N *ikke* er en delmengde av O.
(c) [1 poeng] Gi et eksempel på en formel med *nøyaktig to* konnektiver, som er i $O \cup N$.
(d) [1 poeng] Gi et eksempel på en formel med *nøyaktig to* konnektiver, som er i $O \cap N$
(e) [1 poeng] Gi et eksempel på en formel med *nøyaktig to* konnektiver, som er i $O \setminus N$.
(f) [5 poeng] Bevis ved strukturell induksjon at enhver oppformel er ekvivalent med minst én nedformel. Hint: Du kan bruke at $(F \wedge G)$ er ekvivalent med $\neg(\neg F \vee \neg G)$.

Eksamen 2022 vår - oppgave 7 (kapittel 10, 12)

7 Rekursjon og induksjon [10 poeng]

Vi antar at mengden av DNA-strenger er induktivt definert som den minste mengden D slik at $\Lambda \in D$ og hvis s i D, så er også sA, sT, sG og sC i D.

Vi har også følgende to funksjoner definert på D:

- Funksjonen `rev` som *reverserer* en streng. For eksempel vil `rev(TAG)` = `GAT`.
- Funksjonen `komp` som gir den *komplementære* strengen, det vil si at `A` og `T` bytter plass og at `G` og `C` bytter plass. For eksempel vil `komp(TAG)` = `ATC`.

(a) [1 poeng] Regn ut `rev(komp(ACCTGA))`.
(b) [2 poeng] Hvor mange DNA-strenger s i D_4 er slik at s = `rev(komp(s))`?
(c) [3 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen `komp`.
(d) [4 poeng] La s være en DNA-streng. Vis ved induksjon at antall `A`-er i s er lik antall `T`-er i `komp(s)`.

Eksamen våren 2022 (kapittel 13, 14)

3 Førsteordens språk [10 poeng]

Anta at konstantsymbolene a og b representerer henholdsvis Arwen og Beorn, og anta at S, M, G og D er relasjonssymboler slik at

$S(x, y)$ representerer «x ser på y»,
$M(x, y)$ representerer «x er mot y»,
$G(x)$ representerer «x er en god film», og
$D(x)$ representerer «x er en dårlig film».

Finn førsteordens formler som representerer følgende setninger.

(a) [2 poeng] Det finnes en film som er både god og dårlig.
(b) [2 poeng] Beorn er mot alle dårlige filmer.
(c) [2 poeng] En film er god bare hvis den ikke er dårlig.
(d) [2 poeng] Arwen ser alle gode filmer, men ingen dårlige filmer.
(e) [2 poeng] Beorn ser alle dårlige filmer som Arwen er mot.

Eksamen høsten 2021 (kapittel 13, 14)

2 Førsteordens logikk og representasjon [10 poeng]

Anta at S er et relasjonssymbol med aritet to, at T er et relasjonssymbol med aritet én, og at a og b er konstant-symboler.

- Formelen Sxy representerer «x stoler på y».
- Formelen Tx representerer «x er troverdig».
- Konstantsymbolene a og b representerer henholdsvis Anna og Bob.

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn. Pass på at strukturen i en formel samsvarer med strukturen i utsagnet.

(a) [2 poeng] «Anna stoler på Bob, og Bob er troverdig, men Bob stoler ikke på noen.».
(b) [2 poeng] «Bob stoler på alle som er troverdige.»
(c) [2 poeng] «Anna stoler ikke på noen som ikke stoler på seg selv.»
(d) [2 poeng] «Alle har noen de stoler på som er troverdige.»
(e) [2 poeng] «Alle som er troverdige blir stolt på av alle som ikke er troverdige.»

Eksamen våren 2022 (kapittel 15, 16)

4 Førsteordens modeller [10 poeng]

La følgende to førsteordens formler, F og G, være gitt.

$$(F) \quad \forall x(Px \to Rx) \vee \forall x(Qx \to Rx) \qquad (G) \quad \forall x((Px \wedge Qx) \to Rx)$$

I denne oppgaven skal du analysere hvordan F og G avhenger av hverandre. Vi antar for enkelhets skyld at alle modellene har $\{1, 2\}$ som domene. Når du angir modeller, angi kun tolkningene til de ikke-logiske symbolene. Legg vekt på å gi detaljerte og grundige begrunnelser av svarene dine.

(a) [2 poeng] Finnes det en modell som oppfyller både F og G? Hvis ja, finn en modell som oppfyller begge formlene; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(b) [2 poeng] Finnes det en modell som falsifiserer både F og G? Hvis ja, finn en modell som falsifiserer begge formlene; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(c) [3 poeng] Er F er en logisk konsekvens av G? Hvis ja, bevis det; hvis nei, finn et moteksempel.

(d) [3 poeng] Er G er en logisk konsekvens av F? Hvis ja, bevis det; hvis nei, finn et moteksempel.

Eksamen høsten 2021 (kapittel 15, 16)

6 Førsteordens logikk og semantikk [10 poeng]

Anta at vi har et førsteordens språk med relasjonssymbolene R og Q (begge med aritet to), funksjonssymbolene f, g og h (alle med aritet én) og konstantsymbolene a og b. La modellen $\mathcal{M}$ ha domenet $D = \{1, 2\}$, og la relasjonssymbolene og konstantsymbolene tolkes på følgende måte:

- $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
- $a^{\mathcal{M}} = 1$
- $b^{\mathcal{M}} = 2$

Hint: I disse oppgavene må du angi $f^{\mathcal{M}}$, $g^{\mathcal{M}}$ og $h^{\mathcal{M}}$ som funksjoner fra D til D.

(a) [2 poeng] Gi en tolkning av f slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$\forall x Q(f(x), b)$$

(b) [3 poeng] Gi en tolkning av g slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$Q(a, g(b)) \wedge \exists x R(a, g(x))$$

(c) [5 poeng] Gi en tolkning av h slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$\forall x \neg \exists y R(x, h(y))$$