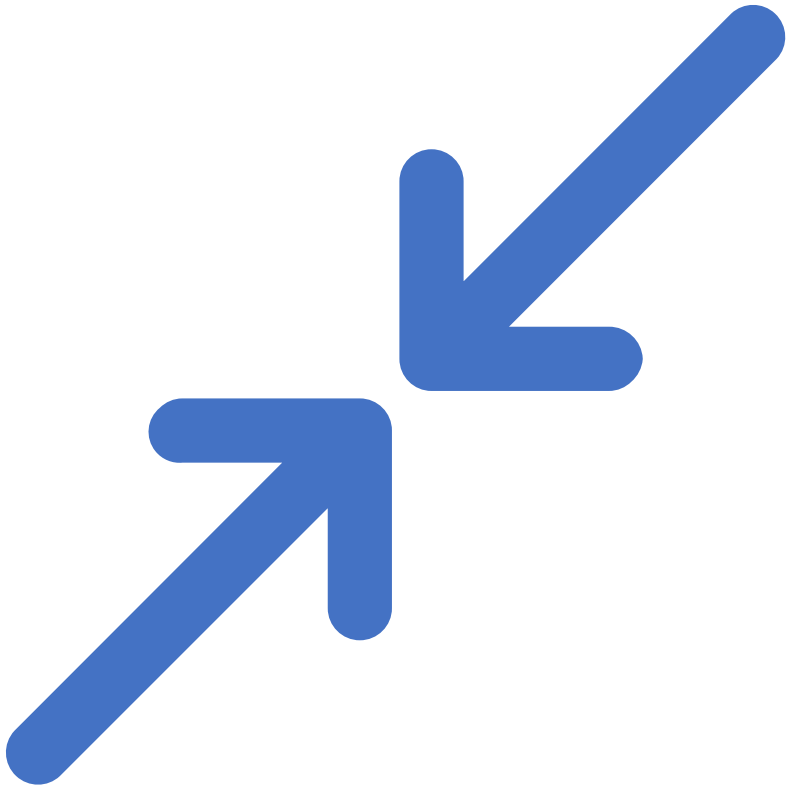


Rami Alkawadri

IN1150 – gruppe 10
Uke 6

Plan for dagen

- Kapittel 9 og 10
- Eksamensoppgave

Kapittel 9 oppsummering

- Anta at M er en delmengde av A
- At M er **lukket** under en gitt operasjon på A betyr at når vi utfører denne operasjonen på ett eller flere elementer i M, er vi garantert til å få et element i M.
  Med andre ord vi får ikke noen nye elementer ved å anvende operasjonen på elementer i mengden.
- Den minste mengden som inneholder M og er lukket under en eller flere operasjoner kalles **tillukningen** av M.
- Disse mengder er lukket under subtraksjon:
  - Mengden av heltall
  - Mengden av rasjonale tall
- Men mengden av naturlige tall er ikke lukket under subtraksjon. F.eks.
  2 - 3 = -1, som ikke er et naturlig tall

- Anta at R en relasjon
- Den minste mengden som inneholder R og har en gitt egenskap kalles **tillukningen** av R.
- Eksempler på egenskaper: refleksiv, symmetrisk, transitiv
- La A være mengden $\{1,2,3\}$ og R være relasjonen $\{< 1,1 >, < 1,2 >\}$
- Da er den refleksive tillukningen av R lik $\{< 1,1 >, < 1,2 >, < 2,2 >, < 3,3 >\}$
- Men dette er ikke en refleksiv tillukningen av R $\{< 1,1 >, < 1,2 >, < 2,2 >, < 3,3 >, < 3,1 >\}$

Kapittel 9 oppsummering (forts)

- En **induktivt definert mengde** er den minste mengde som inneholder en gitt mengde **(basismengde)** og som er lukket under gitte operasjoner.
- Å definere en mengde induktivt har tre steg:
  1. **Basissteget**: å spesifisere basismengde
  2. **Induksjonsteget**: Å spesifisere operasjonene
  3. **Tillukningen**: å ta den minste mengden som inneholder basis mengde og er lukket under operasjonene.
- Eksempler:
- Mengden av partall A defineres sånn
  1. Basissteget: $\{0\}$
  2. Induksjonsteget: hvis $x \in A$, så $x + 2 \in A$ og $x - 2 \in A$
  3. Tillukningen: Denne mengden som vi definerte her er den minste mengden som har de gitte egenskapene

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av **utsagnslogiske formler** (*eng: propositional formulas*) er den minste mengden X slik at følgende holder:

- Enhver utsagnsvariabel er med i X.
  Disse utgjør basismengden og kalles **atomære formler** (*eng: atomic formulas*).
- Hvis F er med i X, er $\neg$F med i X.
- Hvis F og G er med i X, så er $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ og $(F \rightarrow G)$ med i X.

Definisjon (Liste)

Mengden av **lister** (*eng: lists*) over en mengde A er induktivt definert som den minste mengden slik at følgende holder:

- () er en liste over A.
  Dette er den **tomme listen** (*eng: empty list*) over A.
- Hvis $x \in A$ og L er en liste over A, er $x :: L$ en liste over A

$$1 :: (2,3,4) = (1,2,3,4)$$

Kapittel 9 oppsummering (forts)

Definisjon (Binært tre)

Mengden av **binære trær** (*eng: binary trees*) over en mengde A er den minste mengden slik at følgende holder:

- $()$ er et binært tre over A.

  Dette kalles det **tomme binære treet** (*eng: empty binary tree*) eller bare det **tomme treet** (*eng: empty tree*).
- Hvis $x \in A$, og V og H er binære trær over A, er (V, x, H) et binært tre over A.

  Elementet x kalles en **node** (*eng: node*) i det binære treet.

  Når et binært tre er på formen $((), x, ())$, kalles x en **bladnode** eller en **løvnode** (*eng: leaf node*).

- Andre mengder som er definer I boken er alfabet, strenger, språk, bitstreng
- **Konkatenering** er operasjonen som består av å slo to stenger s og t til én st.

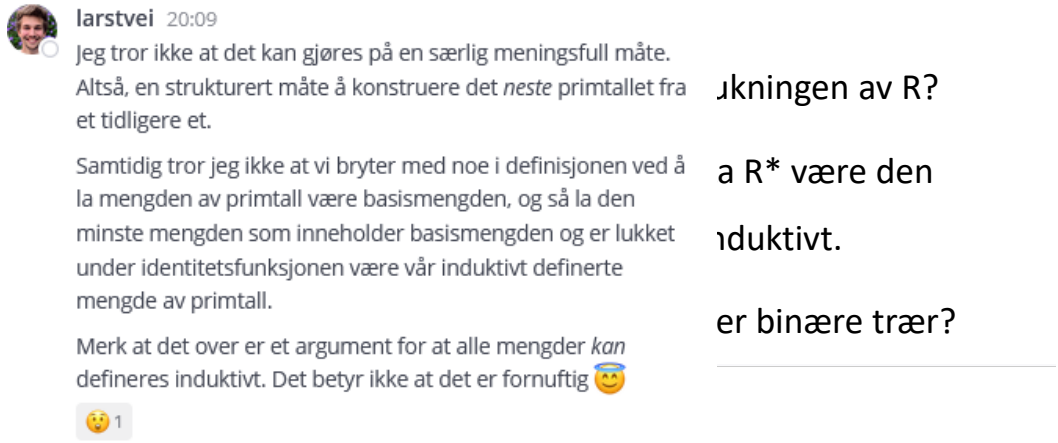
- Spørsmål:
  1. Kan mengden av primtall defineres induktivt?
  2. Anta at $A = \{1,2,3\}$ og R er en relasjon på A,

ukningen av R?

a R* være den

nduktivt.

er binære trær?



Kapittel 10 oppsummering

- M er en mengde som er induktivt definert.
- En rekursivt funksjon f med definsjonsområdet M defineres slik:
    1. **Basissteget**: for hvert element x i basismengden, spesifiserer vi en verdi $f(x)$
    2. **Rekursjonssteget**: for hvert element x i M som forekommer i induksjonsteget, definerer vi verdien $f(x)$ ved å bruke de tidligere definerte verdiene for f
- La oss definere funksjon f som teller antall 1-ere i en bitstreng, f.eks. $f(10011) = 3$.
    1. Basissteget: $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$
    2. La v være en bitstreng, da er $f(v0) = f(v)$ og $f(v1) = f(v) + 1$
    3. F.eks:

$$f(10011) = 1 + f(1001) = 1 + 1 + f(100)$$
$$= 1 + 1 + f(10) = 1 + 1 + f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

1. Spørsmål:
    1. Kan vi definere funksjonen max rekursivt, dvs funksjonen som tar en liste med naturlige tall og returnerer det største tallet i listen?

       F.eks: $\max\big((1, -1, 8, 5)\big) = 8$
    2. La f være en funksjon på de naturlige tallene definert slik: $f(n) = 1 + (-1)^n$, definer f rekursivt.

Eksamen 2022 vår - oppgave 7

7 Rekursjon og induksjon [10 poeng]

Vi antar at mengden av DNA-strenger er induktivt definert som den minste mengden D slik at $\Lambda \in D$ og hvis s i D, så er også sA, sT, sG og sC i D.

Vi har også følgende to funksjoner definert på D:

- Funksjonen `rev` som *reverserer* en streng. For eksempel vil `rev(TAG)` = `GAT`.
- Funksjonen `komp` som gir den *komplementære* strengen, det vil si at `A` og `T` bytter plass og at `G` og `C` bytter plass. For eksempel vil `komp(TAG)` = `ATC`.

a) Regn ut rev(komp(ACCTGA))

b) Gi en rekursiv definisjon av funksjonen komp

Eksamen 2020 høst - oppgave 5

5 Induksjon og rekursjon [20 poeng]

La Λ være alfabetet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{A}, \texttt{B}\}$. En **lovlig** streng er en streng som begynner med kun små bokstaver og som ender med kun store bokstaver, når vi leser strengen fra venstre mot høyre, og hvor det er *like mange* små og store bokstaver.

- Noen eksempler på lovlige strenger er `aB`, `baBB`, `babaAAAB` og `aabbaBBAAB`.
- Noen eksempler på ulovlige strenger er `aaB`, `BAba`, `aBbB`, `BAba` og `aaBBAA`.

Tenk på bokstavene som parenteser som balanserer hverandre i par. Vi kan visualisere dette med piler på følgende måte. Her går det en altså pil mellom bokstavene som balanserer hverandre:

Strengene `baBB` og `babaAAAB` er lovlige.



Videre sier vi at `a` og `A` er av samme **type** og at `b` og `B` er av samme **type**. I strengen `baBB` består det ytterste paret av `b` og `B`, som er av samme type, og det innerste paret består av `a` og `B`, som er av forskjellig type.

(a) [6 poeng] Gi en induktiv definisjon av mengden M av lovlige strenger.

(b) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathrm{N} : \mathrm{M} \to \mathbb{N}$ som teller antall par av bokstaver i en streng i M. For eksempel har vi at $\mathrm{N}(\texttt{babaAAAB}) = 4$.

(c) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen B som for en streng i M teller antall venstrebokstaver som balanseres av en høyrebokstav av samme type. For eksempel har vi at $\mathrm{B}(\texttt{babaAAAB}) = 3$.

(d) [2 poeng] Gi en rekursiv definisjon av funksjonen U som for en streng i M teller antall venstrebokstaver som balanseres av en høyrebokstav som *ikke* er av samme type. For eksempel har vi at $\mathrm{U}(\texttt{babaAAAB}) = 1$.