IN1150 - Uke 9

Kapittel 15 - 16

Kapittel 15

- Modeller gir oss semantikk til førsteordens logikk
- Dette kan fortelle oss hvilke formler er sanne og hvilke er usanne
- Dette er viktig fordi sannhet avhenger av tolkning
- En modell består av en ikke-tom mengde kalt domenet |M| og en funksjon som tolker ikke-logiske symbolene

- Denne funksjonen er bare tolkningen av ikke logiske symbolene
- Vi kaller en term lukket hvis den ikke inneholder noen variabler
- En lukket term tolkes slik: $f(t_1,...,t_n)^M = f^M(t_1{}^M,...,t_n{}^M)$
- Eksempel: vi skal lage en modell for ⟨ a, b; +,x; =, < ⟩

– Hvis k er et konstantsymbol, er $k^{\mathcal{M}} \in D$.
– Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^n til D.
– Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, er $R^{\mathcal{M}}$ en n-ær relasjon på D, det vil si en delmengde av D^n.

Kapittel 15 (forts)

- En lukket atomær formel $R(t_1,...,t_n)$ er sann i en modell M, $M \models R$, dersom dersom $\langle t_1^M,...,t_n^M \rangle \in R^M$
- I vår modell ⟨ a, b; +,x; =, < ⟩ er (a = a) sann og (a < b) også sann, fordi $a^M = 0$ og $b^M = 1$
- Anta at s og t er termer og x en variabel, da er s[x/t] resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t
- F.eks. f(x, y, a) der x er variabel og y, a og f er termer da er f(x, y, a)[x/a] = f(a, y, a)
- Anta at Φ er en formel, t en term og x en variabel, da er Φ[x/t] resultatet å erstatte alle **frie** forekomster av x med t
- F.eks. (∀xPx ∧ Qx)[x/a] = (∀xPx ∧ Qa)
- For alle sammensatte lukket formler, definerer vi rekursivt hva det vil si at en formel er sann. Der basissteget består av alle atomære formler som er sanne, dvs $M \models R$. Det rekursive steget er sånn

$\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$	hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
$\mathcal{M} \models \neg\varphi$	hvis det *ikke* er tilfellet at $\mathcal{M} \models \varphi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for alle* a i $\lvert\mathcal{M}\rvert$.
$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$	hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for minst en* a i $\lvert\mathcal{M}\rvert$.

Kapittel 15 (forts)

- En lukket formel er
  - **oppfyllbar** hvis det finnes en modell som gjør den sant ellers er den **kontradiktorisk**
  - **gyldig** dersom alle modeller gjør den sann, ellers er den falsifiserbar
- F.eks. er følgende formel gyldig:
  $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\exists xPx \vee Qb)$

Kapittel 16

- To lukkede førsteordens formler P og R er ekvivalente hvis alle modeller som gjør P sant gjør R sant og vice versa, $R \Leftrightarrow P$
- F.eks. er alle gyldig formler ekvivalente
- Disse er også ekvivalente:
  $\exists x(Px \vee Qx) \Leftrightarrow \exists xPx \vee \exists xQx$
  $\forall x(Px \wedge Qx) \Leftrightarrow \forall xPx \wedge \forall xQx$
- La M være en mengde av lukkede førsteordens formler og R være en lukket førsteordens formel.
  Hvis R er sann for alle valuasjoner som gjør alle formlene i M sanne samtidig, er R en logisk konsekvens av M. Vi skriver $M \vdash R$

- Noen velkjent logiske begreper:
  - Teori: en mengde med formler
  - Aksiomer: er formlene i en teori
  - Teoremer: er alle logiske konsekvenser av teorien
- Preneks normalform er når alle kontorene kommer i begynnelsen
- F.eks. $\forall x \exists y \exists z(Rxyz \wedge Px)$

Eksamen våren 2022

4 Førsteordens modeller [10 poeng]

La følgende to førsteordens formler, F og G, være gitt.

$$(F) \quad \forall x(Px \to Rx) \vee \forall x(Qx \to Rx) \qquad (G) \quad \forall x((Px \wedge Qx) \to Rx)$$

I denne oppgaven skal du analysere hvordan F og G avhenger av hverandre. Vi antar for enkelhets skyld at alle modellene har $\{1, 2\}$ som domene. Når du angir modeller, angi kun tolkningene til de ikke-logiske symbolene. Legg vekt på å gi detaljerte og grundige begrunnelser av svarene dine.

(a) [2 poeng] Finnes det en modell som oppfyller både F og G? Hvis ja, finn en modell som oppfyller begge formlene; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(b) [2 poeng] Finnes det en modell som falsifiserer både F og G? Hvis ja, finn en modell som falsifiserer begge formlene; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(c) [3 poeng] Er F er en logisk konsekvens av G? Hvis ja, bevis det; hvis nei, finn et moteksempel.

(d) [3 poeng] Er G er en logisk konsekvens av F? Hvis ja, bevis det; hvis nei, finn et moteksempel.

Eksamen høsten 2021

6 Førsteordens logikk og semantikk [10 poeng]

Anta at vi har et førsteordens språk med relasjonssymbolene R og Q (begge med aritet to), funksjonssymbolene f, g og h (alle med aritet én) og konstantsymbolene a og b. La modellen $\mathcal{M}$ ha domenet $D = \{1, 2\}$, og la relasjonssymbolene og konstantsymbolene tolkes på følgende måte:

- $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
- $a^{\mathcal{M}} = 1$
- $b^{\mathcal{M}} = 2$

Hint: I disse oppgavene må du angi $f^{\mathcal{M}}$, $g^{\mathcal{M}}$ og $h^{\mathcal{M}}$ som funksjoner fra D til D.

(a) [2 poeng] Gi en tolkning av f slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$\forall x Q(f(x), b)$$

(b) [3 poeng] Gi en tolkning av g slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$Q(a, g(b)) \wedge \exists x R(a, g(x))$$

(c) [5 poeng] Gi en tolkning av h slik at modellen $\mathcal{M}$ oppfyller følgende formel:

$$\forall x \neg \exists y R(x, h(y))$$