Gruppetime 5

Kapittel 9 & 10

Tillukningen av mengder

- Tillukningen av en mengde M under en operasjon
  - Den minste mengden som har M som undermengde, og er lukket under gitte operasjoner
- F.eks. la A = {0, 1, 2, 3} og M = {<0, 2>, <2, 1>, <3, 1>}
  - Hva er den refleksive tillukningen av mengden?
  - Hva er den symmetriske tillukningen av mengden?
  - Hva er den transitive tillukningen av mengden?
- La A = $\mathbb{R}$ og M = {0 , 1}, hva er den additive tillukningen av M?

Induktivt definerte mengder

- En induktivt definert mengde er den minste mengden som:
  - Består av en basismengde
  - Et induksjonssteg
  - Tillukningen
- Eksempel 1
  - la basismengden være $M = \{0\}$
  - For induksjonssteget: dersom $x \in M$, så er $(x+1) \in M$
  - Hva er tillukningen av denne mengden?
- Eksempel 2
  - Definerer $M = \{0\}$
  - Dersom $x \in M$, så er $(x+2) \in M$ og $(x-2) \in M$
  - Hva er tillukningen av denne mengden

Strenger

- Definerer A til å være en mengde bokstaver, kaller A for et “alfabet”
- Et *ord* i A er en sammensetning av bokstavene i A, kalles også en *streng*
  - F.eks. hvis A = {a, b}, kan ett ord være “bba”
- Hvis man har to strenger, kan man sette den ene foran den andre i det man kaller *konkatenering*
  - f.eks. s = “abb” og t = “abba”, kan man konkatenere s med t slik: st = “abbabba”
- A^* er mengden over alle strenger i alfabetet A, definert som følger:
  - $\Lambda \in A^*$, hvor Λ er den tomme strengen (Λ = “”)
  - Dersom $s \in A^*$ og $x \in A$, så er $sx \in A^*$ (konkatenering)
  - F.eks. $\{a, b, c\}^* = \{\Lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$
- Et språk over A er en *undermengde* av A^*
- Noen språk vi allerede kjenner
  - Mengden av alle utsagnslogiske formler over alfabetet $\{P, Q, R, \ldots, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (,)\}$
  - Mengden av alle syntaktisk korrekte python-programmer

Noen Oppgaver

- Hvorfor finnes ikke den anti-symmetriske tillukningen av relasjonen R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>}?
- Gitt følgene indukt definerte mengder, hva er de "første" 5 elementene i mengden
  - A = {0}, dersom x ∈ A, så er (2x+3) ∈ A
  - B = {1}, dersom x ∈ B, så er (x+1) ∈ B *og* (4x) ∈ B
  - C = {a}, dersom s ∈ C, så er (asb) ∈ C
- Finn induktive definisjoner for følgende mengder:
  - A = {0, 4, 8, 12, 16, ...}
  - B = {Λ, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...}
  - C = {2, 4, 16, 256, 65536, ...}
- Anbefalte oppgaver fra boka:
  - 9.2, 9.3, 9.11, 9.12, 9.13

Rekursive funksjoner

- Dersom en mengde M er induktivt definert, kan en definere en funksjon f på domene M slik:
  - For alle x i basismengden til M definer en verdi f(x), kalles *basistilfelle*
  - For hver følgene x, definer f(x) via de tidligere verdiene for f, kalles *rekursjonssteget*

Eksempler og oppgaver

- Mengden av alle positive partall {2, 4, 6, 8, ...} kan defineres induktivt slik:
  - M = {2}, dersom x ∈ M, så er (x+2) ∈ M
- En rekursiv funksjon, kan beskrive samme mengden slik:
  - f(0) = 2, *basistilfellet*
  - f(n + 1) = f(n) + 2, *rekursjonssteget*
- Gitt funksjonen f(n) = 5n + 2, gi en rekursiv definisjon av den samme funksjonen
- Gitt funksjonen f(n) = n^3, gi en rekursiv definisjon av den samme funksjonen (skummel)

Fibonacci tallene

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$L_n = \varphi^n + (1-\varphi)^n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Sekvensen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … kalles fibonacci-tallene
- Oppstår ved å ta summen av de 2 forrige tallene i følgen
- Kan definere en rekursiv funksjon som følger:
  - La F(0) = 0 og F(1) = 1 (merk 2 basistilfeller)
  - Definerer F(n + 2) = F(n) + F(n + 1)
- Lucas-tallene er veldig likt som fibonacci, men defineres som følger:
  - La L(0) = 2 og L(1) = 1
  - L(n + 2) = L(n) + L(n+1)
  - Finn de første 10 tallene i følgen
- Funfact Lucas-tallene kan også defineres slik:
  - L(n) = F(n-1) + F(n+1)
  - F(n) = (L(n-1) + L(n+1)) / 5

Oppgaver

- Gi en rekursiv funksjon som tar inn en bitstreng og gir antall forekomster av bokstaven “1”
- La alfabetet A = {a, b, c} og funksjonen f over A^* defineres som følger:
  - $f(\Lambda) = 0$
  - $f(as) = f(s) + 1$, $f(bs) = f(s) + 1$ og $f(cs) = f(s) - 2$
  - Hva er f(a), f(b), f(c), f(abac), f(aabbcc) og f(cabaccbbab)
  - Hva gjør funksjonen?
- Anbefalte oppgaver fra boka:
  - 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.6, 10.9