Gruppetime 6

Kapittel 11 & 12

Matematisk Induksjon

- Matematisk induksjon er veldig likt konsept som induktivt definerte mengder og rekursive funksjoner (kap 9 & 10)
- Har en påstand man ønsker å bevise
- Bevis at påstanden gjelder for et spesifikt tilfelle *(basistilfellet)*
- Bevis at dersom påstanden er gyldig for ett tilfelle, så *må* påstanden også være gyldig for det "neste" tilfellet *(induktive steget)*
- kombinasjonen av disse 2 bevisene fører til at man kan generere et bevis for *alle* etterfølgende tilfeller fra det spesifikke tilfellet
- Kan tenke at man induktivt definerer mengden av tilfeller hvor påstanden er gyldig

Mer formelt

Basistilfellet:

- Bevis at påstanden holder for et basistilfelle. Ofte betyr dette å bevise påstanden holder for n = 0

Induktive steget:

- Vis at dersom påstanden holder for et gitt naturlig tall n, så *må* påstanden holde for n+1.
- Antakelsen om at påstanden holder for en gitt n kalles *induksjonshypotesen*

Eksempel

Bevis påstanden "summen av de første n tallene er lik $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$" ved induksjon

- Basistilfellet: summen av de første 1 tallene er lik $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✅

Induktive steget:

Anta påstanden er gyldig for et vilkårlig tall k (slik at vi setter n=k i påstanden) (resten på tavla)

Oppgaver

- Anta du blir gitt funksjonen f(n+1) = f(n) + 2n + 1 hvor f(0) = 0 og g(n) = n^2, bruk induksjonsbevis for å vise at f(n) = g(n)

11.7 Check whether 2^n is greater than n for all natural numbers. In that case, can you prove it by mathematical induction?

11.5 It seems that every third Fibonacci number is an even number:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987

Prove this for all Fibonacci numbers by mathematical induction.

Andre anbefalte oppgaver fra boka: 11.3, 11.8, 11.11, 11.12

Strukturell induksjon

- I matematisk induksjon, bruker vi den induktive definisjonen av de naturlige tallene
- I strukturell induksjon, bruker man at det samme er mulig over enhver induktivt definert mengde
- Igjen, så skal man først vise at påstanden er gyldig for en basismengde (ofte basismengden for den induktivt definerte mengden man jobber med)
- Etter det viser man at dersom påstanden er gyldig for alle elementer i en mengde som generer et element x under tillukningen, så må påstanden stemme for x
- Akkurat som med matematisk induksjon viser man at påstanden holder for hele basismengden, og at påstanden må holde for alle elementer som kan genereres fra tillukningen av basismengden
- Kan tenke at man induktivt definerer mengden av elementer hvor påstanden er gyldig, og viser at denne mengden er den samme som den induktive mengden man jobber i

Mer formelt (igjen)

Anta en mengde er induktivt definert. For å bevise at en påstand er sann for alle elementene i mengden, holder det å vise følgende 2 påstander:

- Påstanden holder for alle elementene i basismengden. Dette kalles *basissteget*
- Dersom mengden er lukket under en operasjon som genererer elementet x fra x_1 , x_2 , x_3 , ..., *og* påstanden er sann for alle elementene x_1 , x_2 , x_3 , ..., så må påstanden også være sann for x. Dette steget kalles det induktive steget, og antakelsen om at påstanden holder for alle x_1 , x_2 , x_3 , ... kalles induksjonshypotesen (IH).

With the same notation as before, where $P(x)$ stands for the statement to be proved, we can write the two steps in a proof by structural induction in the following way:

- The *base case*: that $P(x)$ is true for all x in the base set.
- The *inductive step*: that *if* $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ are true, and x is generated from $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *then* $P(x)$ is also true.

Eksempel

La B være mengden bitstrenger og funksjonene f og g ta inn en bitstreng og være rekursivt definert som følger:

f(0) = -1, f(1) = 1, g(0) = 1 g(1) = 0

f(s0) = f(s) - 1, f(s1) = f(s) + 1, g(s0) = g(s)1, g(s1) = g(s)0,

hvor s er en bitstreng

1. beskriv hva funksjonene f og g gjør
2. bevis ved strukturell induksjon at f(b) + f(g(b)) = 0 for alle bitstrenger b.

Oppgaver

12.8 (a) Recursively define a function REV on lists that **reverses** the list. For example, $\text{REV}((1,2,3)) = (3,2,1)$. Hint: Use +.

(b) Check that $\text{REV}((a,b) + (c,d)) = \text{REV}((c,d)) + \text{REV}((a,b))$.

(c) Prove by structural induction on lists that

$$\text{REV}(L + M) = \text{REV}(M) + \text{REV}(L)$$

for all lists L and M.

(d) Prove by structural induction on lists that

$$\text{REV}(\text{REV}(L)) = L$$

for all lists L.

Anbefalte oppgaver fra boka: 12.1, 12.2, 12.3, 12.6, 12.7, 12.10,