Gruppetime 7

Kapittel 13 & 14

Førsteordens språk

Førsteordens språk består av:

- logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, og $\neg$
- kvantorene $\forall$ and $\exists$
- mengde av konstantsymboler
- mengde funksjonssymboler
- mengde relasjonssymboler

Signaturer

Definition 13.2. Signature

The nonlogical symbols constitute what is called a **signature**. A signature is given as a tuple of three sets in the following way:

$$\langle \underbrace{a, b, c, \ldots}_{\text{constant symbols}} ; \underbrace{f, g, h, \ldots}_{\text{function symbols}} ; \underbrace{R, S, T, \ldots}_{\text{relation symbols}} \rangle$$

Here the constant, function, and relation symbols are separated by semicolons.

Skrivemåte for funksjoner og relasjoner

- funksjoner og relasjoner kan ta inn potensielt mer enn ett argument. Antall argumenter funksjonen/relasjonen tar inn kalles **ariteten** til funksjonen/relasjonen
- Man kan skrive samme tingen på flere måter:
  - $f(x, y) = fxy$
  - $(\langle a, b \rangle \in R) = aRb = Rab$

Kvantorer

- $\forall$ - “for alle”, brukes ofte når noe skal gjelde uavhengig av hva elementet man jobber med er
- $\exists$ - “det eksisterer”, brukes ofte når man ønsker å si noe om eksistensen til noe
- binder like sterkt som negasjonstegnet i formler
- f.eks. $\exists yPy \wedge Px$ betyr det samme som $(\exists yPy \wedge Px)$, men *ikke* det samme som $\exists y(Py \wedge Px)$

Composite formulas in the simple language. Here are some composite first-order formulas in the simple language, together with what they express.

Pa	P *is true for* a
$\exists x Px$	*there exists an* x *such that* Px
$\forall x Px$	*for all (or for every)* x *it is such that* Px
$\neg Rax$	a *is not related to* x
$\forall x \forall y Rxy$	*the relation is universal / everything is related to everything else*
$\exists x \exists y Rxy$	*the relation is not empty / something is related to something else*
$\neg \exists x \exists y Rxy$	*the relation is empty / nothing is related*
$\exists x \forall y Rxy$	*there is an element that is related to every element*
$\forall x \exists y Rxy$	*for every element there is an element to which it is related*
$\exists x Rxx$	*there exists an element related to itself*
$\forall x(Px \rightarrow Rxx)$	*if* P *is true for an element, then it is related to itself*
$\forall x(Rxx \rightarrow Px)$	P *is true for every element that is related to itself*

We can thus formulate some familiar properties of relations:

$\forall x Rxx$	R *is reflexive*
$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$	R *is symmetric*
$\forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$	R *is transitive*
$\forall x \neg Rxx$	R *is irreflexive*
$\neg \forall x Rxx$	R *is not reflexive*
$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	R *is asymmetric*

Termer

Term

- Alle variabler og konstanter er termer (f.eks. x, y og a, b)
- Dersom f er en funksjon med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ også en term
- Merk at relasjoner utelates av definisjonen her, vi ser kun på variabler, konstanter og funksjoner

Definition 13.3. First-order terms

Suppose that a first-order language is given. The set of **first-order terms**, or just **terms**, is inductively defined as the smallest set such that each variable and constant symbol is a **term**, and if f is a function symbol with arity n and $t_1, \ldots, t_n$ are terms, then $f(t_1, \ldots, t_n)$ is a **term**.

Formler

2 varianter: Atomære formler og Sammensatte formler

- Atomære formler er et *relasjonssymbol* sammen med et riktig antall *termer* (f.eks. $R(t_1, \ldots, t_n)$)

- Sammensatte formler kalles også bare for formler
  - Atomære formler er formler
  - Gitt to formler, A og B, så er $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, og $(A \rightarrow B)$ også formler
  - Dersom F er en formel, så er også $\forall xF$ og $\exists xF$ også formler

Oppgaver

Andre anbefalte oppgaver fra boka:

13.1, 13.4, 13.7, 13.9

13.3 Decide which of the following expressions are first-order *formulas*, given that the signature is $\langle a, b; f, g; P, R\rangle$, f and P each have arity one, and g and R each have arity two. If the expression is not a formula, explain why not.

(a) $R(x, b)$
(b) $\forall x R(x, b)$
(c) $R(\forall x Px, b)$
(d) $P \vee R(x, x)$
(e) $\exists \forall x Px$
(f) $R(f(f(a)), w)$
(g) $\exists y \wedge \forall y Py$
(h) $Px \rightarrow \exists y R(y)$
(i) $\forall x P(x, a)$
(j) $\forall y R(a)$
(k) $\exists z P(a)$
(l) $\exists z \exists y \forall z P(z)$
(m) (Px)
(n) $f(P(x))$
(o) $R(P(a), b)$
(p) $(\exists x Px)$
(q) $\forall x f(x)$
(r) $Px \exists xx$

13.2 Decide which of the following expressions are first-order *terms*, given that the signature is $\langle a, b; f, g; P, R\rangle$, f and P each have arity one, and g and R each have arity two. If the expression is not a *term*, explain why not.

(a) x
(b) $f(x)$
(c) $g(x, b)$
(d) $g(a)$
(e) $f(x, x)$
(f) $P(x) \wedge R(x, a)$
(g) $\forall x Px$
(h) $f(f)$
(i) $f(P(a))$
(j) $f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$

Representasjon av kvantifiserte utsagn

- Predikat er et utsagn som inneholde en eller flere plassholdere som kan endre sannhetsverdien til utsagnet dersom vi erstatter plassholderene med verdier
- En variabel er fri dersom den ikke er bundet av en kvantor
- En formel er lukket dersom den ikke inneholder noen frie variabler
- Generelt er frie variabler dårlig og lukkete formler gode

Eksempler

- ∀x(Px -> Qx) er lukket
- ∀x Px -> Qx er åpen fordi x er en fri variabel i Qx
- ∀x ∃y Pxy v Qy er åpen fordi y er en fri variabel i Qy
- ∀x ∃y(Pxy v Qy) er lukket

Oppgaver

14.6

Anta B, F, K til å være relasjonssymboler slik at Bx betyr "x er en biolog", Fx betyr "x er en filosof" og Kxy betyr "x kjenner y". Anta videre at a, b og c er konstantsymboler som står for Aristoteles, Bolzano og Copernicus respektivt. Finn gode setninger for følgene formler:

(i) $\neg\exists x(Bx \vee Fx)$

(j) $\exists x(Kax \wedge \neg Bx)$

(k) $\forall x\forall y((Fx \wedge Fy) \rightarrow Kxy)$

(l) $\exists x\forall y(Fy \rightarrow Kxy)$

14.4 For each of the following formulas, find out which variables that occur are free and which are bound:

(a) Rxy
(b) $\forall xSxy$
(c) $\forall x\exists yTxy$
(d) $\forall xRxy \wedge Px$
(e) $\forall x(Rxy \wedge Px)$
(f) $\forall y(Ryy \wedge Py)$
(g) $\exists x(y + x = 0)$
(h) $\forall x\forall y(y + x \rightarrow x + y)$
(i) $\forall x\exists y(y + x = 0)$

14.5 Suppose that M, T, and L are relation symbols such that Mx represents "x is a mathematician," Tx that "x is a TV celebrity," and Lxy that "x likes y." Find *natural-sounding* English sentences that correspond to the following first-order formulas:

(a) $\neg\exists x(Mx \wedge Tx)$
(b) $\exists x(Tx \wedge \neg Mx)$
(c) $\exists x\forall y(Ty \rightarrow Lxy)$
(d) $\neg\exists xMx$
(e) $\forall x(Mx \vee Tx)$
(f) $\forall x(Tx \rightarrow Lxx)$
(g) $\exists x(Tx \wedge \exists y(My \wedge Lyx))$
(h) $\forall x\exists yLxy$
(i) $\forall x\exists y(Lxy \wedge \neg Ty)$
(j) $\exists x(Mx \wedge \forall yLxy)$
(k) $\forall x(Mx \rightarrow \forall y(Ty \rightarrow \neg Lxy))$
(l) $\neg\exists x\exists y(Mx \wedge Ty \wedge Lxy)$

Andre anbefalte oppgaver:
14.3, 14.7, 14.8, 14.9