Gruppetime 8

Kapittel 15 & 16

Forrige uke

- Førsteordens logikk
- Hvordan oversette førsteordens uttrykk til naturlige setninger
  - Ofte illogiske/feile setninger (f.eks. forrige uke med setningen “det finnes ingen biolog eller filosof”)
- Nå skal vi kunne tolke setningene. Altså ikke bare behandle *syntaksen*, men også *semantikken* til førsteordens logikk

Modeller for førsteordens logikk

- Modeller beskriver hvordan man skal tolke den semantiske betydningen til syntaksen gitt fra førsteordens logikk
- For eksempel, hvordan skal man kunne tolke om $\forall xPx$ er sann eller usann? Dette avhenger av tolkning, og man trenger dermed et system for hvordan å formalisere tolkingen man bruker, nemlig modeller
- Husk:
    - Førsteordens språk kommer med en signatur med informasjon om hvilke konstanter, funksjoner og relasjoner som brukes i språket
    - funksjoner og relasjoner er mengder av tupler

Modeller, mer formelt

Definition 15.1. Model

A **model** $\mathcal{M}$ for a given first-order language consists of a nonempty set D, called the **domain** of the model, and a function $\cdot^{\mathcal{M}}$ (written as a superscript) that interprets all nonlogical symbols in the following way:

- If k is a constant symbol, then $k^{\mathcal{M}} \in D$.
- If f is a function symbol with arity n, then $f^{\mathcal{M}}$ is a function from D^n to D.
- If R is a relation symbol with arity n, then $R^{\mathcal{M}}$ is an n-ary relation on D, that is, a subset of D^n.

We write $|\mathcal{M}|$ for the domain D of the model $\mathcal{M}$.

Notasjon

- Mange bommer på eksamen fordi de glemmer å spesifisere modellen man bruker til å tolke med
- Eksempel på tolkning med en modell:

  La modellen M ha domene D = {0, 1, 2, 3, 4} slik at vi tolker a som 3, b som 4 og funksjonen

  f: D -> D med aritet en slik at f tar inn argumenter fra domene D og gir ut 0 dersom den tar inn et partall, og 1 dersom den tar inn et oddetall.

$$f(a)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(a^{\mathcal{M}}) = f^{\mathcal{M}}(3) = 1 \qquad a^{\mathcal{M}} = 3$$
$$f(b)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(b^{\mathcal{M}}) = f^{\mathcal{M}}(4) = 0 \qquad b^{\mathcal{M}} = 4$$

Oppfyllbarhet & gyldighet til førsteordens formler

- Generelt det samme konseptet fra utsagnslogikk, men nå jobber vi over modeller
- En formel sies til å være:
  - *Oppfyllbar* dersom det eksisterer en modell som gjør formelen *sann*
  - *Falsifiserbar* dersom det eksisterer en modell som gjør formelen *usann*
  - *Gyldig* dersom *enhver* modell gjør formelen sann
  - *Kontradiktorisk* dersom *enhver* modell gjør formelen *usann*
- Merk:
  - en formel som *ikke* er oppfyllbar, *må* være kontradiktorisk
  - en formel som *ikke* er falsifiserbar, *må* være gyldig

Eksempler (løses på tavla)

- Vis at følgende formel er falsifiserbar: $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$
- Lag en modell som oppfyller følgende formler: $Pa \wedge Pb, \neg\exists x(Px \wedge Qx), \text{and } \exists xQx$

- Lag en modell som oppfyller følgende formler: $\exists xPx \text{ and } \forall x\neg Qx$

Oppgaver

15.2 Show that the following formulas are valid:

(a) $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\exists xPx \vee Qb)$

(b) $(\forall xRxa \vee \forall xRxb) \rightarrow \forall x(Rxa \vee Rxb)$

Show that the following formulas are falsifiable:

(c) $(\exists xPx \wedge \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

(d) $\forall x(Rxa \vee Rxb) \rightarrow \exists x(Rax \wedge Rbx)$

(e) $(\forall xRxa \vee \forall xRxb) \rightarrow \forall x(Rax \vee Rbx)$

(f) $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow \forall xQx)$

15.3 Suppose that $\mathcal{M}$ is a model for $\langle a, b, c\,; s, f, g\,; \rangle$. Suppose that $\mathcal{M}$ has the natural numbers as domain and is such that $a^{\mathcal{M}} = 1$, $b^{\mathcal{M}} = 2$, and $c^{\mathcal{M}} = 3$, and for all natural numbers x, $f^{\mathcal{M}}(x) = 2x$ and $g^{\mathcal{M}}(x, y) = (x \cdot y) + 1$. Calculate the following:

(a) $f(a)^{\mathcal{M}}$

(b) $f(b)^{\mathcal{M}}$

(c) $f(f(c))^{\mathcal{M}}$

(d) $g(a, c)^{\mathcal{M}}$

(e) $f(g(b, c))^{\mathcal{M}}$

(f) $g(g(a, a), g(c, c))^{\mathcal{M}}$

Andre anbefalte oppgaver (sortert etter personlig mening på hvor viktige oppgavene er):

15.8, 15.10, 15.14, 15.7, 15.16, 15.4, 15.5

Resonnering om modeller

Definisjon (Ekvivalens)

To lukkede førsteordens formler φ og ψ er **ekvivalente** (*eng: equivalent*) hvis enhver modell som gjør φ sann, også gjør ψ sann, og vice versa. Sagt på en annen måte, for enhver modell $\mathcal{M}$, vil $\mathcal{M} \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \psi$. Vi skriver $\varphi \Leftrightarrow \psi$ når φ og ψ er ekvivalente.

Definisjon (Logisk konsekvens)

La M være en mengde av lukkede førsteordens formler, og la φ være en lukket førsteordens formel. Hvis φ er sann i enhver modell som gjør alle formlene i M sanne samtidig, er φ en **logisk konsekvens** (*eng: logical consequence*), eller bare en **konsekvens** (*eng: consequence*), av formlene i M. Vi skriver $M \models \varphi$ når φ en logisk konsekvens av M. Med skrivemåten $\varphi \Rightarrow \psi$ mener vi at ψ er en logisk konsekvens av mengden som består av φ.

Ekvivalens mellom kvantorer og konnektiver

$\neg\forall x Px$ er ekvivalent med $\exists x \neg Px$

Hvis ikke alle kommer på festen, er det noen som ikke kommer.

Hvis det er noen som ikke kommer på festen, kommer ikke alle.

$\neg\exists x Px$ er ekvivalent med $\forall x \neg Px$

Hvis det ikke er noe som er farlig, er alt ufarlig.

Hvis alt er ufarlig, er det ikke noe som er farlig.

Mer ekvivalens mellom kvantorer og konnektiver

$\exists x(Px \vee Qx)$ er ekvivalent med $\exists xPx \vee \exists xQx$.
Hvis det finnes en som danser eller er glad, finnes det en som danser eller det finnes en som er glad, og vice versa.

$\forall x(Px \wedge Qx)$ er ekvivalent med $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
Hvis alle danser og er glade, danser alle og alle er glade, og vice versa.

$\forall x(Px \vee Qx)$ er *ikke* ekvivalent med $\forall xPx \vee \forall xQx$.
Alle er menn eller kvinner, men det er ikke slik at alle er menn eller alle er kvinner.

$\exists x(Px \wedge Qx)$ er *ikke* ekvivalent med $\exists xPx \wedge \exists xQx$.
Det finnes et partall og det finnes et oddetall, men det finnes ikke noe som både er partall og oddetall.

Enda ENDA mer om samspillet av konnektiver og kvantorer

Dersom x er en variabel som ikke er *fri* i formelen φ (altså at $\forall x\varphi = \varphi$), så gjelder disse ekvivalensene

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \forall x\psi, \qquad \exists x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi,$$
$$\forall x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi, \qquad \exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \exists x\psi,$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \varphi \to \forall x\psi, \qquad \exists x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \varphi \to \exists x\psi,$$
$$\forall x(\psi \to \varphi) \Leftrightarrow \exists x\psi \to \varphi, \qquad \exists x(\psi \to \varphi) \Leftrightarrow \forall x\psi \to \varphi.$$

Preneks normalform

- Noen ganger er det nyttig/ryddigere å skrive om en formel med kvantorer slik at alle kvantorene ligger foran resten av formelen.
- **preneks normalform** *(eng: prenex normal form)* 16

  En formel på preneks normalform er på formen $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ hvor hver Q_i enten er $\forall$ eller $\exists$ og φ er uten kvantorer.

Eksempel - preneks normalform

Skriv om følgende formel på preneks normalform (oppgv. 16.18) $\mathrm{Pa} \wedge (\forall x \mathrm{Q}x \vee \forall x \mathrm{R}x)$

…og neste formel

$\exists x(\mathrm{F}xa \wedge \forall y \mathrm{G}y) \rightarrow \forall z \mathrm{H}za$

Oppgaver

- 16.6 og 16.7 For hvert punkt, angi hvilke formler som er logiske konsekvenser av hvilke andre:
  - $\forall xPx$, $\exists xPx$ og $Pa \wedge Pb$
  - $\forall x \exists yRxy$, $\exists y \forall xRxy$, $\forall x \forall yRxy$ og $\exists x \exists yRxy$
- Gitt en modell M med domene {1, 2, 3}, for hver av formlene nedenfor, gi en tolkning av R slik at formlene blir *sanne*
  - $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$
  - $\exists x \forall yRxy \wedge \forall xRxx$
  - $\forall x \exists yRxy \wedge \forall x \neg Rxx$

Andre anbefalte oppgaver:

16.3, 16.8, 16.9, 16.15, 16.12