

Gruppetime 10

Mer kombinatorikk og litt abstrakt algebra

Planen

1. time
- Gjennomgangen

2. time
- Selvstendig jobbing

Dette lærte forrige uke (kombinatorikk)

- Multiplikasjonsprinsippet
  - Brukes dersom vi har en rekke uavhengige valg
  - Produktet av antall muligheter ved hvert valg
- Permutasjon
  - Når vi har alle elementene, og skal se på rekkefølgen
  - n!
- Ordnet utvalg (uten repetisjon)
  - Vi skal velge k elementer fra n mulige i rekkefølge
  - $${}^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$
- Uordnet utvalg (uten repetisjon)
  - Vi skal velge k elementer fra n mulige, uten å se på rekkefølgen
  - $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Systematisering av opptellingsproblemer

Hvis vi skal velge k elementer fra en mengde med n elementer, kan det gjøres på følgende måter:

	ordnet utvalg	uordnet utvalg
med repetisjon	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
uten repetisjon	${}^nP_k$	$\binom{n}{k}$



- Uordnet utvalg med repetisjon
  - Vi overfører problemet til et tilsvarende problem, som vi vet hvordan vi kan løse
  - "stars and bars". Vi skal plassere k stjerner i n båser. Til det trenger vi k stjerner og n-1 skillevegger.
  - Problemet vi løser nå er, på hvor mange måter kan vi plassere skilleveggene, og det kan vi se på som en streng av lengde (n-1 + k), der vi skal velge k av dem til å være stjerner.
  - *Det vil finnes en en-til-en korrespondanse mellom vårt opptellingsproblem, og problemet vi løser når vi finner mulige steder å sette skilleveggene.*

Oppgave kombinatorikk

Oppgave

19.2 Vi sier at en streng er et **palindrom** (*eng: palindrome*) dersom resultatet blir det samme om den leses forlenges eller baklengs. For eksempel er `abba` og `1234321` palindromer. Hvor mange palindromer av lengde m er det over et alfabet med n tegn?

- Vi kan si at et palindrom er en streng på formen sxs’
  - s er en streng på m/2 tegn (rundet av nedover)
  - s’ er s reversert
  - x kan være et tegn (hvis m er oddetall), eller en tom streng (hvis m er partall)
- Hvis s er bestemt, så er s’ også bestemt.
- Antall tegn i s + x er m/2 (rundet av oppover), dette er antall valg vi må gjøre
- For hvert av disse valgene, har vi n muligheter, siden det er n tegn i alfabetet
- Dette gir totalt $\mathbf{n^{m/2}}$ muligheter

Oppgaver kapittel 19

Oppgave

19.10 Anta at alfabetet $\{0, 1, 2\}$ er gitt, og la oss si at en streng er **sortert** (*eng: sorted*) hvis sifrene ikke synker i verdi. For eksempel er `001122` og `002` sorterte, men `221100` og `201` er ikke det.

(a) Finn alle sorterte strenger av lengde én, to og tre.
(b) Hvor mange sorterte strenger av lengde fire og fem finnes det?
(c) Hvor mange sorterte strenger av lengde m finnes det?
(d) Hva er svaret på forrige spørsmål hvis det var n tegn i alfabetet?

Løsning 19.10

Alfabet = {0, 1, 2}

a) Her kan vi ramse opp:
   i) Lengde 1: 0, 1, 2 (3 strenger)
   ii) Lengde 2: 00, 01, 02, 11, 12, 22 (6 strenger)
   iii) Lengde 3: 000, 001, 002, 011, 012, 022, 111, 112, 122, 222 (10 strenger)

b) Her kan vi fortsette å ramse opp, eller finne svaret på c) først:)
   i) Lengde 4: 15 strenger
   ii) Lengde 5: 21 strenger

c) *For å finne lengde m, må vi generalisere.*
   i) Vi kan se på dette som et uordnet utvalg med repetisjon. Siden strengene må være sortert, så er strengen entydig bestemt når vi vet antall av hvert tegn, så vi er kun interessert i hvor mange ganger hver tall er valgt, og hver tall kan velges flere ganger.
   ii) Vi har lengde **m**, og antall tegn i alfabetet = **3**. *(n = 3, k = m)*
   iii) Vi kan nå tenke oss at vi har **m** stars, og ***2 (3-1)*** bars. Vi finner da antall stjerner ved å regne ut "(m+2) velg m" eller tilsvarende "(m+2) velg 2"

d) Dersom det er **n** tegn, må vi bytte ut **3** med **n**, da får vi "(m+n-1) velg m".

Kapittel 20 - Abstrakt algebra

- **Invers**
  - Relasjon
    - {<1, 2>, <2, 3>} sin invers er {<2,1>, <3, 2>}
  - Funksjon
    - Ikke alle funksjoner har en invers ❗ {<1, 2>, <2, 2>}
    - Kun bijektive funksjoner har en invers
- **Kommutativ**
  - x * y = y * x
  - Eksempel:
    - 5 + 2 = 2 + 5 ✅
    - 5 - 2 ≠ 2 - 5 ❌
- **Assosiativ**
  - x * (y * z) = (x * y) * z
  - Eksempel:
    - 5 · (4 · 3) = (5 · 4) · 3 ✅
    - 5 - (4 - 3) ≠ (5 - 4) - 3 ❌



Kapittel 20 - Abstrakt algebra

- **Idempotent**
  - Unære operasjoner
    - $f(f(x)) = f(x)$
    - Eksempel: Funksjonen f runder opp til nærmeste heltall. $f(f(5,5)) = f(5,5)$
  - Binære operasjoner
    - $x * x = x$
    - Eksempel: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
- **Identitetselement**
  - Hvis $x * e = e * x = x$ så er e identitetselementet til operasjonen *
  - Eksempel:
    - 0 for +-operasjonen
    - $4 + 0 = 0 + 4 = 4$
- **Inverse elementer**
  - Om $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, så er x^{-1} og x inverse (der e er identitetselementet til *)
  - Eksempel:
    - + på heltall har identitetselement 0, siden $x + 0 = 0 + x = x$
    - Inversen til 5 er er -5, siden $5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$
  - Ikke alle elementer har en invers ❗

Kapittel 20 - Abstrakt algebra

- **Grupper**
  - Gitt en binær operasjon * på en mengde G er⟨G, *⟩en gruppe dersom:
    - * er assosiativ
    - * har et identitetselement
    - Alle elementer i G har en invers

- Gruppe eller ikke gruppe?
  - ⟨ ℕ/⟩
    - assosiativ ❌, identitetselement ❌, invers ❌
  - ⟨{0, 1}, ·⟩
    - assosiativ ✅, identitetselement ✅, invers ❌
  - ⟨ ℝ -⟩
    - assosiativ ❌, identitetselement ❌, invers ❌

Oppgave kapittel 20

20.10 For hvert av følgende valg for G og $\bullet$, avgjør om $\langle G, \bullet \rangle$ blir en gruppe.

(c) La G være $\mathbb{Z}$, og la $a \bullet b = a \cdot b$

(d) La G være $\mathbb{R}$, og la $a \bullet b = a + b$

(f) La G være $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, og la $a \bullet b = \frac{a}{b}$

- c) Nei
  - Assosiativ ✅
  - Identitetselement: 1 ✅
  - Invers ❌ 0 har ingen invers
- d) Ja
  - Assosiativ ✅
  - Identitetselement: 0 ✅
  - Invers: x + (-x) = (-x) + x = 0 ✅
- f) Nei
  - Assosiativ: ❌
  - Identitetselement: ❌
  - Invers ❌

Oppgaver kapittel 20

20.2

La $R = \{\langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,a\rangle\}$ og $f = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,2\rangle\}$.

(a) Hva er den inverse relasjonen til R?

(b) Forklar kort hvorfor funksjonen f ikke har en invers.

a) {<2,3>, <3,2>, <a,1>}

b) f har ikke en invers funksjon fordi den ikke er bijektiv.
Vi har både <1,2> og <b,2>, i den inverse *relasjonen* vil vi inneholde både <2,1> og <2,b>. Dette bryter med definisjonen av en funksjon.