

Gruppetime 11

Grafer

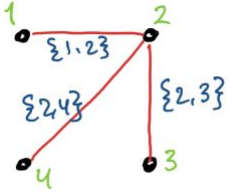


Kapittel 21 - Grafteori

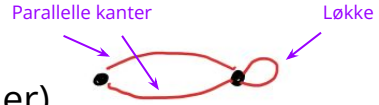
- Graf
  - En ikke-tom mengde V av noder
  - En mengde E av kanter

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$

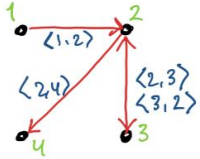


- Multigraf/pseudograf
  - Kan inneholde løkker (en kan fra en node til seg selv)
    og parallelle kanter (flere kanter mellom samme par av noder).



- Rettet graf
  - Kantene i en graf har en retning
  - Vi skiller mellom kanten uv og kanten vu

$E = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$



- Som regel mener vi en *enkel urettet graf*, når vi snakker en *graf*, med mindre noe annet er spesifisert.

Kapittel 21 - Grafteori

- Tom graf
  - Har ingen kanter



- Komplett graf
  - Alle nodene er nabo med hverandre
  - Inneholder “alle” kantene

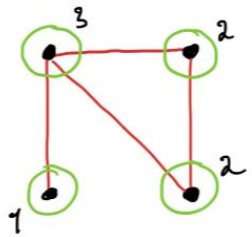


- Komplement
  - Komplementet til en graf G, kalles $\overline{G}$.
  - En kant er med i $\overline{G}$, hvis og bare hvis den ikke er med i G



Kapittel 21 - Grafteori

- Graden til en node
  - Antall kanter som går til/fra en gitt node
  - Siden en hver kant alltid har en start og en slutt (binder 2 noder sammen), vil alltid *summen av graden til alle nodene i en graf være 2 x antall kanter*
  - Vi vil alltid ha et partall antall noder av odde grad i en graf (håndhilselemmaet)



$$\sum \deg(v) = 2|E|$$

$$3+2+2+1 = 8 = 2 \cdot 4$$

Oppgaver kapittel 21

Oppgave

21.3 Anta at en graf har 10 noder og at hver node har grad 6. Hvor mange kanter har grafen?

$$\sum deg(v) = 2|E|$$

- 10 noder med grad 6.
- Summen av graden til alle nodene er da 10 · 6 = 60.
- Vi har at antall kanter er lik summen av alle nodene delt på 2.
- Vi får da 60/2 = 30 kanter.

$$|E| = \frac{\sum deg(v)}{2}$$

Oppgaver kapittel 21

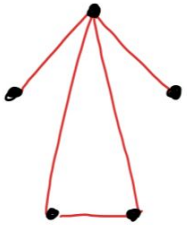
Oppgave

21.6 Hvis en enkel graf G har n noder og m kanter, hvor mange kanter har $\overline{G}$?

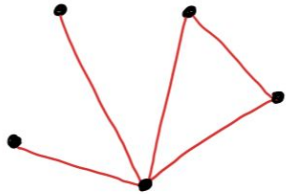
- Vi vet at dersom vi "legger sammen" G og $\overline{G}$, så får vi den komplette grafen.
- Dersom vi vet antall kanter i den komplette grafen med n noder, og antall kanter i G, kan vi finne antall kanter i $\overline{G}$.

- Finne antall noder i den komplette grafen med n noder :
  - Hvert par av noder (*uv*) i grafen har nøyaktig en kant mellom seg.
  - Hvis vi finner antall par av noder i grafen har vi også funnet antall kanter.
  - Antall par av noder i en graf, kan vi se på som uordnet utvalg uten repetisjon.
  - Vi skal velge 2 noder, og vi bryr oss ikke om rekkefølgen.
  - Den komplette grafen har $\binom{n}{2}$ kanter
- $\overline{G}$ vil da ha $\binom{n}{2} - m$ kanter

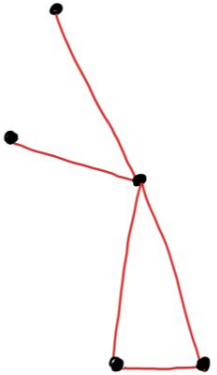
Isomorfi (formlikhet)



- To grafer G og H er isomorfe dersom det finnes en bijektiv funksjon f fra nodene i G til nodene i H, slik at nodene u og v er naboer i G hvis og bare hvis f(u) og f(v) er naboer i H
- Hvis vi kan “strekke og dra” i grafene slik at de blir like.



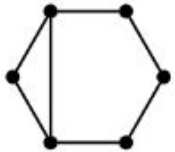
- Ting å se etter for å avgjøre om to grafer er isomorfe:
  - Sjekk om grafene samme antall noder og kanter
  - Sjekk antall noder av en bestemt grad
  - Let etter egenskaper, eks 3 noder som alle er naboer



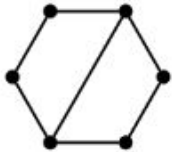
Oppgaver kapittel 21

Oppgave

21.10 Gi et argument for at følgende grafer ikke er isomorfe. Hint: Finn en egenskap som kun den ene grafen har.



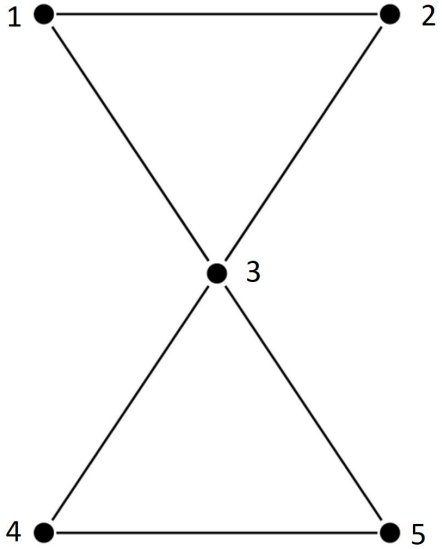
graf 1



graf 2

- Begge grafene har 6 noder, fire noder med grad 2 og to noder med grad 3
- La oss se på nodene med ***grad 3***, i *graf 1* er disse to en felles nabo, det er de ikke i *graf 2*
- Vi kan også se at *graf 1* har *3 noder som alle er nabo med hverandre*, det har ikke *graf 2*

Kapittel 22 - Vandringer i grafer

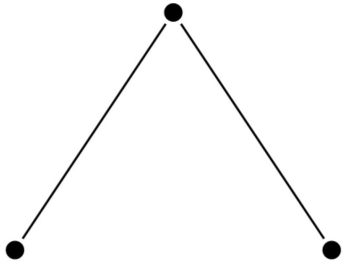


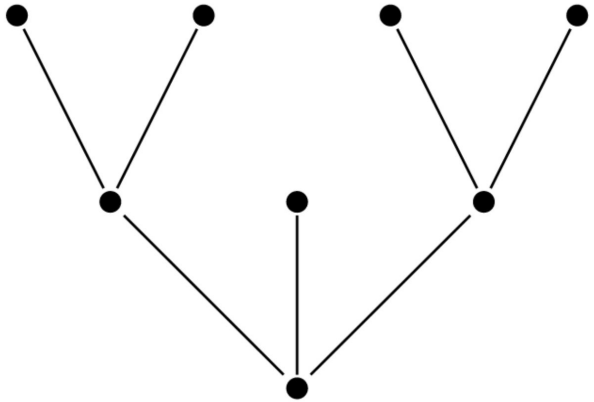
- Vandringer
  - Sekvens av noder og kanter i en graf
- Lukket vandring
  - En vandring som ender i samme node som den startet
- Sti
  - Vandring der ingen *node* forekommer mer enn én gang
- Kretser
  - En lukket vandring hvor ingen *kant* forekommer mer enn én gang
  - Huskeregel: *(K for Kant & Krets)*
- Sykel/Lukket sti
  - En sti som ender ved samme node som den startet*
    - Må ha minst 3 noder
  - Grafer som ikke inneholder sykler kalles asykliske

Kapittel 22 - Vandringer i grafer



- Sammenhengende graf
  - Det finnes en *sti mellom alle par av noder* i grafen
- Trær
  - Sammenhengende, asyklisk graf
  - Løvnoder (noder med grad 1)
  - En graf der alle komponentene er trær, kalles en skog





Oppgaver kapittel 21

Oppgave 8 Grafteori og trær (10 poeng)

Et **tre** er en sammenhengende, asyklisk graf. En node med grad én i et tre kalles en **løvnode**.

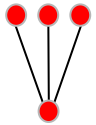
(a) [2 poeng] Tegn alle trær med fire noder.

(b) [3 poeng] Tegn et tre som har seks noder, hvorav nøyaktig to er løvnøder.

(c) [5 poeng] Bevis at hvis du har et tre og legger til en kant (men ikke en node), har du ikke lenger et tre.

Eksamen 2015

Løsning oppgave grafteori

a) o—o—o—o 

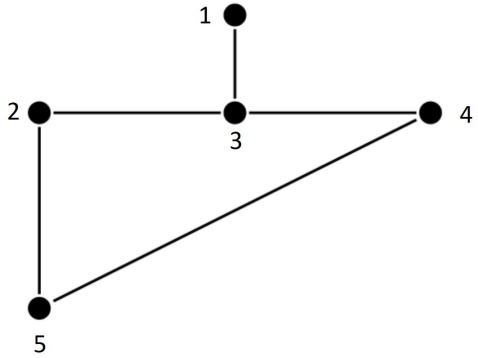
b) o—o—o—o—o —o

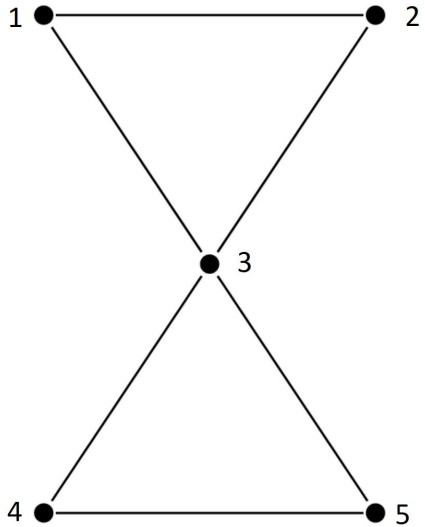
c) Skal bevise at hvis vi legger til en kant i et tre, så er det ikke lengre et tre

i) Anta et tre.
ii) Da er grafen sammenhengende og asyklisk *(definisjonen av et tre)*.
iii) Det betyr at det finnes en vandring fra node u til node v, for en hver node u og v i treet
iv) Dersom vi legger til en kant mellom node u og v, vil vi enten få parallelle kanter hvis u og v var naboer fra før, eller få en sykel, hvis u og v ikke var naboer fra før.
v) I begge tilfeller har vi ikke et tre lengre, per definisjon av tre.

Kapittel 22 - Eulervei og eulerkrets

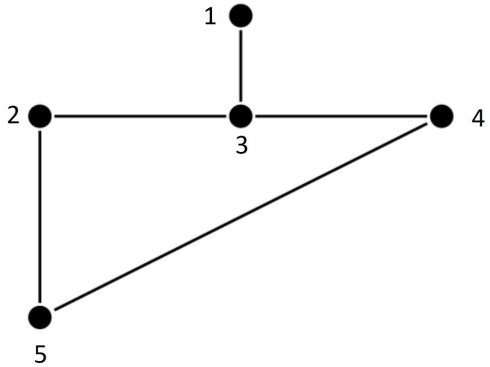
- Eulervei
  - Vandring som inneholder hver *kant* i grafen nøyaktig én gang
  - Maksimalt to noder kan ha odde grad
- Eulerkrets
  - Eulervei som starter og slutter i samme node
  - Finnes hvis og bare hvis ingen noder har odde grad
- Huskeregel: *E for Euler & Edge*

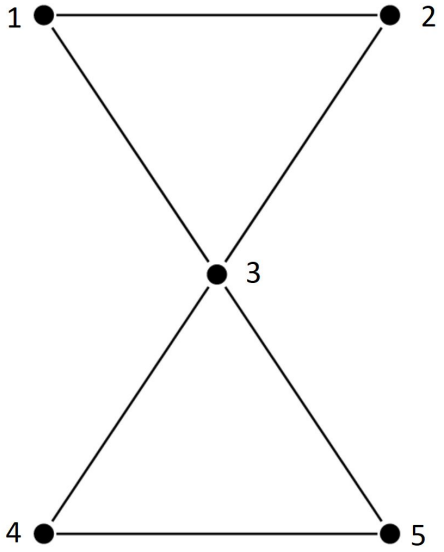




Kapittel 22 - Hamiltonstier og hamiltonsykler

- Hamiltonsti
  - En sti som inneholder hver *node* i grafen nøyaktig én gang
- Hamiltonsykel
  - En sykel som inneholder hver node i grafen nøyaktig én gang
  - En graf med en hamiltonsykel kalles hamiltonsk
- Huskeregel: *O i nOde & hamiltOn*



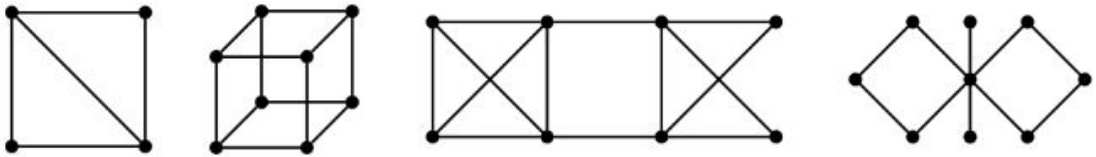


Oppgaver kapittel 22

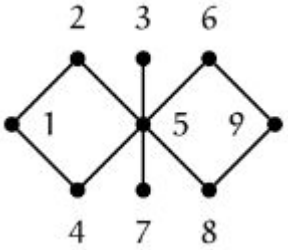
Oppgave

22.2 (a) Har følgende grafer *eulerkretser* eller *eulerveier*? Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

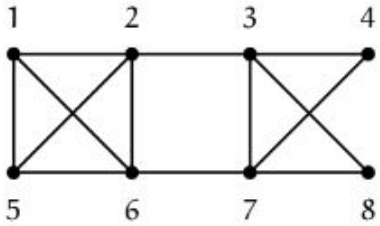
(b) Har grafene *hamiltonstier* eller *hamiltonsykler*? Hvis ja, gi minst ett eksempel.



Løsning deler av 22.2



- 2 noder (3&7) av odde grad
- Eulervei: 3 - 5 - 6 - 9 - 8 - 5 - 2 - 1 - 4 - 5 - 7
- Eulerkrets: Finnes ikke
- Hamiltonsti: Finnes ikke, node 5 er et “knutepunkt”
- Hamiltonsykel: Finnes ikke



- 2 noder (1&5) av odde grad
- Eulervei: 1 - 2 - 3 - 4 - 7 - 3 - 8 - 7 - 6 - 5 - 1 - 6 - 2 - 5
- Eulerkrets: Finnes ikke
- Hamiltonsti: 4 - 3 - 2 - 1 - 5 - 6 - 7 - 8
- Hamiltonsykel: Finnes ikke


Pause

Andre oppgaver...

Oppgaver kapittel 22

Oppgave

22.8 (a) Bevis at hvis G ikke er sammenhengende, må $\overline{G}$ være det.

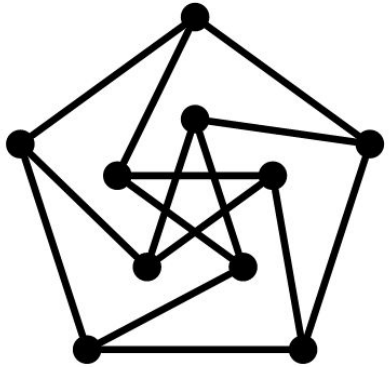
(b) Finn et bevis eller et moteksempel for følgende påstand: For enhver graf G, er G eller $\overline{G}$ en hamiltonsk graf.

(a) Holder å vise at hvis G ikke er sammenhengende, så er G’ det.

- Anta at G ikke er en sammenhengende graf, skal vise at da er G’ sammenhengende
- At G’ er sammenhengende vil si at det finnes en sti mellom hvert par av noder, u og v
- La u og v være to vilkårlige noder i G
  - Må vise at det finnes en sti mellom disse i G’
- Dersom det ikke finnes en sti mellom dem i G, finnes det en kant mellom dem i G’
- Dersom det finnes en kant mellom dem i G, er de i samme komponent.
- Siden G ikke er sammenhengende, finnes det flere komponenter
- Velg en node w fra en annen komponent
- Da finnes det ikke en kant mellom u og w eller v og w i G
- Da må kantene uw og vw være i G’, og det finnes en sti fra u til v i G’

Sant/Usant

22 Vandringer i grafer [3 poeng]



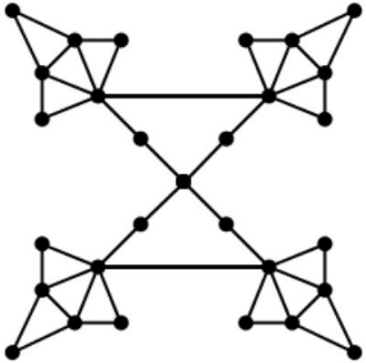
(a) Denne grafen har en sykel av lengde åtte. (Sant / Usant)

(b) Denne grafen har en eulervei. (Sant / Usant)

(c) Denne grafen har en hamiltonsti. (Sant / Usant)

Eksamen h18

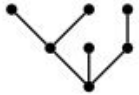
1.20 Vandringer i grafer [3 poeng]



Se på grafen over. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Grafen har en Eulerkrets, det vil si en krets som inneholder hver kant fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)
- Grafen har en Hamiltonsti, det vil si en sti som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)
- Grafen har flere enn fem sykler. (Sant / Usant)

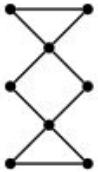
1.20 Grafteori [3 poeng]



A



B



C

Se på grafene over. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Grafene A og B er isomorfe. (Sant / Usant)
- Grafen C har en eulerkrets, det vil si en krets som inneholder hver kant fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)
- Grafen C har en hamiltonsti, det vil si en sti som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)