Gruppetime 12

Formelle språk, gramatikker og naturlig deduksjon

Plan for timen

Siste uke med nytt pensum ✅

1. time
- Siste gjennomgangen

Pause ☕

2. time
- Jobbe med siste innleveringen

(men ikke glem å komme på repesitsjonstimer de neste ukene 🤓)

Kapittel 23 - Formelle språk og grammatikker

- Operasjoner på språk
  - Konkatenering av språk to språk
    - La L og M være to språk, $LM = \{ st \mid s \in L \text{ og } t \in M \}$
    - Eks: L = {00, 11}, M = {aa, bb}, LM = {00aa, 00bb, 11aa, 11bb}
    - 💡 Ikke kommutativ!
  - Tillukning av et språk
    - Rekursiv definisjon av L^n: $L^0 = \{\Lambda\}$, $L^{n+1} = LL^n$
    - Mengden av alle endelige strenger over et språk L
    - $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots$
- Regulært språk
  - **Definisjon (Regulært språk)**

    Mengden av **regulære språk** (*eng: regular languages*) over et alfabet A er den minste mengden slik at følgende holder:

    – $\emptyset$ og $\{\Lambda\}$ er **regulære språk** over A, og
    – $\{a\}$ er et **regulært språk** over A for alle $a \in A$.
    – Hvis L og M er regulære språk, er $L \cup M$, LM og L^* også **regulære språk**.

Regulære uttrykk

Definisjon (Regulært uttrykk)

Mengden av **regulære uttrykk** (*eng: regular expressions*) over et alfabet A er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- $\emptyset$ og Λ er **regulære uttrykk** over A, og
- a er et **regulært uttrykk** over A for alle $a \in A$.
- Hvis R og S er regulære uttrykk, er (R), $R|S$, RS og R^* også **regulære uttrykk**.

- Et regulært uttrykk kan beskrive et regulært språk
- Oppgave: La alfabetet A = {a,b,c}, gi eksempler på regulære uttrykk over A
  - a,b,c, (a), (b), (c), a|b, abc|cba, ab, aa, ac, ca, cc, bc, bb, (ab), a* , ab*, aa*b* ….
- Vi kan se nærmere på et par uttrykk
  - ab*
    - Språket: {a, ab, abb, abbb, abbbb, ...}
  - a*(a|b)
    - Språket: {a, b, aa, ab, aaa, aab, aaaa, aaab, ...}

Oppgaver kapittel 23

Oppgave

23.12 For hvert av følgende språk finn et regulært uttrykk som beskriver dette språket:

(a) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$

(b) $\{\mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{ca}\}$

(c) $\{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ac}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \mathtt{bc}\}$

(d) $\{\mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \ldots, \mathtt{ab}^n, \ldots\}$

(e) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{abb}, \mathtt{baa}, \ldots, \mathtt{ab}^n, \mathtt{ba}^n, \ldots\}$

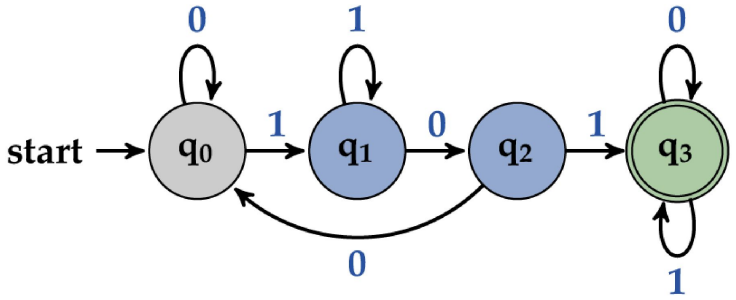
(f) $\{\Lambda, \mathtt{a}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbbb}, \ldots, \mathtt{ab}^{2n}, \ldots\}$

Løsning 23.12

(a) a|b|c
(b) (a|b|c)a
(c) (a|b)(a|b|c)
(d) abb*
(e) ab*|ba*
(f) Λ|a(bb)*

Endelige deterministiske tilstandsmaskiner

- Tilstander *(q_0,q_1, q_2, q_3)*
- Alfabet / inputsymboler *(0,1)*
- Starttilstand *(q_0)*
- Aksepterende tilstand *(q_3)*
- Overgangsfunksjon *(pilene)*



- Kan brukes til å avgjøre om en streng er med i et språk eller ikke.
  - 101 ✅
  - 111 ❌

- Finnes også ikke-endelige tilstandsmaskiner.
  - Ikke entydig hvilken tilstand man er i

Kapittel 23

- Formelle grammatikker
  - Terminalsymboler
  - Ikke-terminalsymboler
  - Startsymbol (et av ikke-terminalsymbolene)
  - Produksjonsregler
- Eksempel
  - *t = {0,1,2,3} , ikke-t = {S, A, B}, startsymbol = S*
  - S → A | B | AS | BS *(produksjonsregel 1)*
  - A → 1 | 3 *(produksjonsregel 2)*
  - B → 0 | 2 *(produksjonsregel 3)*
- Utledning
  - 102
  - S ⇒ AS ⇒ 1S ⇒ 1BS ⇒ 10S ⇒ 10B ⇒ 102

Oppgaver kapittel 23

Oppgave

23.4 La følgende grammatikk være gitt:

$$S \to A \mid B \mid AS \mid BS$$
$$A \to 0 \mid 2 \mid 4 \mid 6 \mid 8$$
$$B \to 1 \mid 3 \mid 5 \mid 7 \mid 9$$

(a) Hvilket språk definerer denne grammatikken?

(b) Gi en utledning av 0123.

Løsning 23.4

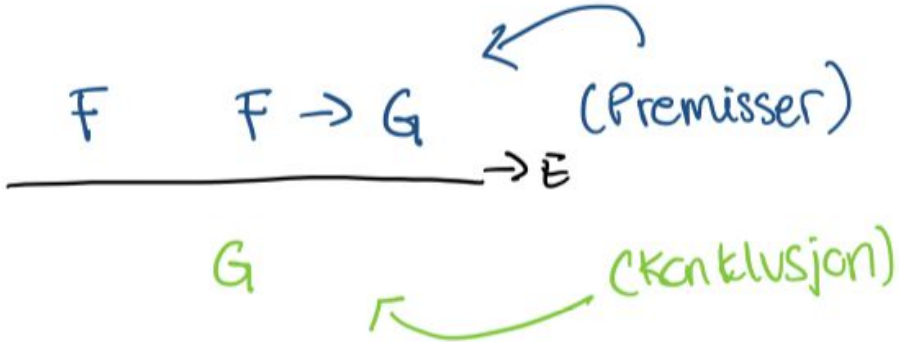
(a) Språket som inneholder alle strenger over $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(b) $S \Rightarrow AS \Rightarrow 0S \Rightarrow 0BS \Rightarrow 01S \Rightarrow 01AS \Rightarrow 012S \Rightarrow 012B \Rightarrow 0123$

Kapittel 24 - Naturlig deduksjon

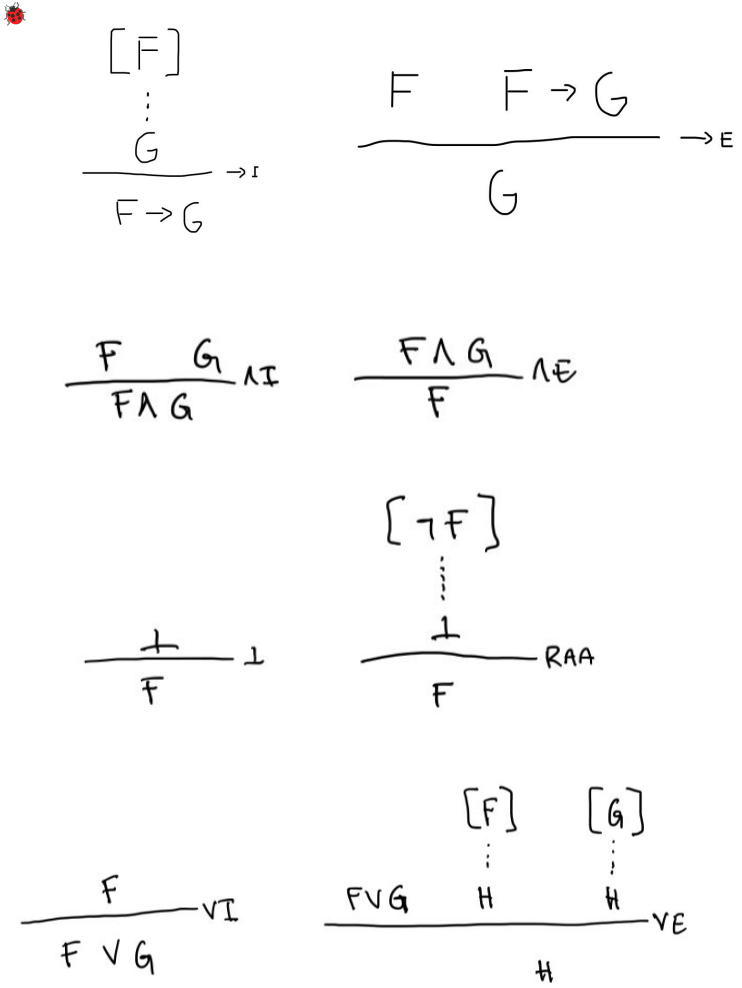
- En logisk kalkyle som består av slutningsregler og måter å lage bevis på
- Vi konstruerer utledninger

- Slutningsregel (regel)
  - Premisser
  - Konklusjon



Reglene

- $\rightarrow$ - introduksjon
- $\rightarrow$ - eliminasjon
- $\wedge$ - introduksjon
- $\wedge$ - eliminasjon
- $\perp$ - regelen
- RAA - regelen
- $\vee$ - introduksjon
- $\vee$ - eliminasjon



Lukking av antagelser

- Det finnes *kun to* måter å *lukke* en antagelse på
  - Reglene →-introduksjon og RAA
  - Vi setter da klammer rundt antagelsen, [F]

- En utledningen der alle antagelsene er lukket, kalles et bevis
  - Dette betyr at vi ikke kan ha åpne antagelser dersom vi skal gjøre et bevis

- v-eliminasjon 🧐
  - Ikke en lukkeregel, men i en v-eliminasjon så antar du det som er i v-formelen og dette blir lukka

Sunnhet og kompletthet

- En kalkyle er sunn hvis enhver bevisbar formel i kalkylen er gyldig
- En kalkyle er komplett hvis enhver gyldig formel er bevisbar i kalkylen

- Naturlig deduksjon er både sunn og komplett.
- Det vil si at alle formler kan bevises hvis og bare hvis de er gyldige



Noen tips

- Vi har et begrenset antall regler, få oversikt over disse (ref siden med alle reglene:)
- Ikke gjør noe som ikke står i reglene
  - Vi kan **ikke** bruke ekvialensregler som vi kjenner fra før!
- Begynn å skrive selv om du ikke vet hva du skal gjøre
  - Du vet *alltid noe*. Om ikke annet vet du hva den siste linja er
- Bruk elimineringsmetoden med alle reglene
  - Se på formelen din, hva er det mulig å gjøre ut fra konnektivene du har å jobbe med?
- Vær litt kreativ, tør å prøve deg frem!
  - Prøv for eksempel å anta negasjonen til noe og se om du kommer noen vei med det
- 💡 Husk at $\neg P = P \rightarrow \bot$ 💡
  - Dette er litt skjult $\rightarrow$-formel
  - Potensiale til å kunne anta P
  - Potensiale for en $\rightarrow$-introduksjon og en lukkemetode (Lukke P igjen)
  - Det kan være lurt å skrive alle negasjonsformler ut slik for å se dette klarere

Oppgaver kapittel 24

18 Naturlig deduksjon [10 poeng]

I denne oppgaven skal du føre bevis og utledninger i naturlig deduksjon, og du skal føre disse på et eget ark. Alle bevisene og utledningene skal gjøres på ett og samme ark. Forsøk å være så nøyaktig som mulig, og gjør bevisene og utledningene så enkle å lese og forstå som mulig.

(a) [3 poeng] Gi et bevis ved naturlig deduksjon for $(P \wedge Q) \rightarrow P$.

(b) [3 poeng] Gi en utledning ved naturlig deduksjon av $P \rightarrow (P \wedge Q)$ med Q som åpen antagelse.

(c) [4 poeng] Gi et bevis ved naturlig deduksjon for $\neg(P \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg Q$.

Eksamen h19

Oppgaver kapittel 24

16 Naturlig deduksjon [10 poeng]

I denne oppgaven skal du føre bevis og utledninger i naturlig deduksjon, og du skal føre disse på et eget ark. Alle bevisene og utledningene skal gjøres på ett og samme ark. Forsøk å være så nøyaktig som mulig, og gjør bevisene og utledningene så enkle å lese og forstå som mulig.

(a) [2 poeng] Gi et *bevis* for $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee R)$ i naturlig deduksjon.

(b) [4 poeng] Gi en *utledning* av $(\neg A \vee \neg B)$ med $\neg(A \vee B)$ som eneste åpne antakelse.

(c) [4 poeng] Gi en *utledning* av $((A \vee B) \rightarrow B)$ med $\neg A$ som eneste åpne antakelse.

Eksamen v19

Oppgaver kapittel 24

Disse oppgavene er relativt vanskelige

Oppgave

24.6 Finn bevis for følgende formler. Disse er litt vanskeligere enn de i forrige oppgave.

(a) $\neg P \to \neg(P \wedge Q)$

(b) $\neg P \to \neg Q \to \neg(P \vee Q)$

(c) $(P \wedge \neg P) \to Q$

(d) $(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

(e) $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \to (P \wedge (Q \vee R))$

(f) $((P \to Q) \to P) \to P$