Gruppetime 2

Mer utsagnslogikk

Plan for timen 👀

1. time
- Stemningsmenti (4260 7072)
- Kort gjennomgang av pensum
- Liten menti
- Oppgaveløsning og spørsmål resten av timen
    - Dere kan stemme frem oppgaver/komme med egne ønske i menti 4260 7072

2. time
- Selvstendig jobbing med oppgaver (innlevering).

Kapittel 3 - Semantikk for utsagnslogikk

- Sannhetsverdier
  - Sann - 1
  - Usann - 0
- Valuasjon
  - Tilordning av sannhetsverdier
  - En valuasjon kan gjøre en utsagnslogisk formel sann eller usann
  - (Det er **ikke** valuasjonen selv som er sann eller usann 😬)
- Sannhetsverditabeller
  - Tabell som forteller sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel, for hver valuasjon
- Logisk ekvivalens ⇔
  - To formler F og G er logisk ekvivalente (eller bare ekvivalente) hvis de har samme sannhetsverdi for **alle** valuasjoner.
  - P ⇔ ¬¬P

Definisjon (Tolkning av utsagnslogiske formler)

Hvis sannhetsverdiene til F og G er gitt, er sannhetsverdien til $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ og $(F \to G)$ som gitt i følgende tabeller, som viser hvordan konnektivene skal tolkes:

F	$\neg F$
1	0
0	1

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

F	G	$(F \vee G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

F	G	$(F \to G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Logisk ekvivalens og implikasjon

$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	(P → Q)			(¬P v Q)			
1	1	1	1	1	0 1	1	1	
1	0	1	0	0	0 1	0	0	
0	1	0	1	1	1 0	1	1	
0	0	0	1	0	1 0	1	0	

Viktig 💡

- Disse to formlene er ekvivalente fordi de har samme sannhetsverdi for hver valuasjon.
- Det kan vi se ut fra sannhetsverditabellen.
- Vi ser at for hver rad, så er sannhetsverdien den samme.

- **Sannhetsverditabellen er ikke selvforklarende!!**

Mer ekvivalens - vi har noen lover

- Distributive lover
  - $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$
  - $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$
- De Morgans lover
  - $\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$
  - $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
- Loven om dobbel negasjon
  - $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Implikasjonslover
  - $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$
  - $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \land \neg B$
- Assosiative lover
- Kommutative lover

Disse kan være nyttige å ha i bakhodet når dere skal løse obligen 💡

(se side 36 i boka)

Kapittel 4 - Utsagnslogiske begreper

- Logisk konsekvens
  - Noe følger logisk fra noe annet
  - $\vdash$
  - $P \wedge Q \vdash P$
- Gyldig argument
  - Et argument er gyldig dersom konklusjonen er en logisk konsekvens av mengden premisser
  - Hvis det er kaldt ute, så har jeg på lue $K \rightarrow L$
  - Det er kaldt ute K
  - ---
  - Jeg har på lue L
  - $\{K \rightarrow L, K\} \vdash L$

Ord som er fint å kunne

- Oppfyllbarhet
  - Det *finnes* minst en valuasjon som gjør formelen *sann*
- Falsifiserbarhet
  - Det *finnes* minst en valuasjon som gjør formelen *usann*
- Tautologi/Gyldighet
  - *Alle* valuasjoner gjør formelen *sann*
  - $\top$
- Kontradiksjon/Motsigelse
  - *Alle* valuasjoner gjør formelen *usann*
  - $\bot$



- Uavhengighet av formler
  - En formel F er uavhengig av en mengde formler M dersom verken F eller ¬F er en logisk konsekvens av M.

Kort menti

3484 9146

Oppgaver kapittel 3 🧐

Formelen $(\neg P \rightarrow \neg P)$ er sann for alle valuasjoner.

Formelen $(\neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R))$ er ekvivalent med $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

Formelen $(P \vee \neg P)$ kan gjøres usann.

Hentet fra prøve-eksamen h20

Oppgaver kapittel 3

3 Semantikk for utsagnslogikk [3 poeng]

(a) Hvis Q er sann, så er også $P \to (Q \vee R)$ sann. (Sant / Usant)

(b) Formelen $(P \wedge \neg Q) \vee (P \to Q)$ er sann for alle valuasjoner. (Sant / Usant)

(c) Hvis $(P \to Q)$ og $(Q \to R)$ er sanne, så er også $(P \wedge R)$ sann. (Sant / Usant)

Hentet fra eksamen h18

Oppgaver kapittel 3

Oppgave

3.2 Sett opp sannhetsverditabellene til følgende uttrykk:

(a) $\neg(P \vee \neg Q) \vee P$

(b) $((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

Oppgave

3.8 Følgende sannhetsverditabell viser hvordan sannhetsverdiene til to formler F og G avhenger av sannhetsverdiene til utsagnsvariablene P, Q og R:

P	Q	R	F	G
1	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**1**

(a) Finn en formel F med utsagnsvariablene P, Q og R slik at F får disse sannhetsverdiene avhengig av sannhetsverdiene til P, Q og R.

(b) Gjør det samme for G.

(c) Finn en metode for å løse *alle* oppgaver på denne formen.



Oppgave

3.22 Vis at følgende par av formler er ekvivalente, først ved å argumentere logisk og deretter ved å bruke sannhetsverditabeller:

(a) $(P \to Q)$ og $(\neg Q \to \neg P)$
(b) $(\neg P \wedge \neg Q)$ og $\neg(P \vee Q)$
(c) $\neg(P \vee \neg Q)$ og $(\neg P \wedge Q)$
(d) $(P \wedge ((Q \vee R) \vee \neg Q))$ og P
(e) $(P \to (P \wedge \neg P))$ og $\neg P$
(f) $(P \wedge (Q \vee R))$ og $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
(g) $(P \to (Q \to R))$ og $((P \wedge Q) \to R)$

Oppgaver kapittel 4

Det finnes en utsagnslogisk formel som er både gyldig og kontradiktorisk.

Formelen $(Q \rightarrow P)$ er en logisk konsekvens av $\{(\neg R \rightarrow \neg Q), (\neg R \vee P)\}$.

Hvis $(P \rightarrow Q)$ er usann, kan P være sann.

Alle gyldige formler er ekvivalente med hverandre.

Hentet fra prøve-eksamen h20

Oppgaver kapittel 4

4 Utsagnslogiske begreper [3 poeng]

(a) Hvis F og G er kontradiktoriske, så er $(\neg F \wedge \neg G)$ gyldig. (Sant / Usant)

(b) Hvis F og G er oppfyllbare, så er også $(F \wedge G)$ oppfyllbar. (Sant / Usant)

(c) Hvis F og G er ekvivalente, så er $(F \rightarrow G)$ og $(G \rightarrow F)$ ekvivalente. (Sant / Usant)

Hentet fra eksamen h18

Oppgaver kapittel 4

Oppgave

4.2 Avgjør om følgende argumenter er gyldige eller ikke. Begrunn svaret ditt.

Argument (a):

Premisser:	$(A \vee B)$
	$(A \rightarrow C)$
	$(B \rightarrow C)$
Konklusjon:	C

Argument (b):

Premisser:	
	$(A \wedge B) \rightarrow C$
	A
Konklusjon:	C

Oppgaver kapittel 4

Oppgave

4.8 Hvilke av formlene under er tautologier og hvilke er kontradiksjoner? Begrunn svaret. Hvis noen av formlene under hverken er tautologier eller kontradiksjoner, forklar hvorfor det er slik.

(a) $(P \vee Q) \rightarrow \neg P$

(b) $P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

(c) $(P \wedge Q) \rightarrow \neg P$

(d) $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$

(e) $\neg(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P)$

(f) $\neg(P \vee Q) \wedge P$

Oppgave 4.14

For hver av påstandene nedenfor, avgjør om den er sann eller usann. Begrunn svaret ditt, og forklar hvorfor det er slik.

(a) Formelen Q er uavhengig av mengden $\{P \vee Q, R\}$.
(b) Formelen Q er uavhengig av mengden $\{P \wedge Q, R\}$.
(c) Formelen Q er uavhengig av mengden $\{\neg Q, P \vee R\}$.
(d) Mengden $\{P, Q, R\}$ er uavhengig.
(e) Mengden $\{P \wedge Q, P \vee Q\}$ er uavhengig.
(f) Mengden $\{P, P \rightarrow Q, \neg Q\}$ er uavhengig.