Gruppetime 6

Matematisk og strukturell induksjon

Plan for timen

1. time
- Gjennomgangen

Pause ☕

2. time
- Selvstendig jobbing

Konseptet induksjonsbevis 🤯

- Vi kan utføre induksjonsbevis på mengder som er ***induktivt definert***
- Matematisk induksjon funker fordi $\mathbb{N}$ kan defineres induktivt.
- Strukturell induksjon er mer generelt
  - Induksjon for alle induktivt definerte mengder.
  - Bitstrenger, utsagnslogiske formler, lister, trær, strenger ...
  - Matematisk induksjon er en underkategori av strukturell induksjon
- Domino-effekten
  - Basissteget: Å velte den første brikken
    - Om vi aldri velter den første vil ingen andre velte heller
  - Induksjonssteget: Viser at en brikke kommer til å velte den neste brikken hvis den faller



Matematisk induksjon

- Bevismetode for naturlige tall
- Tilstrekkelig å bevise
  - Basissteget
  - Induksjonssteget
- Hvordan gjør man dette?
  - Hvordan bevise basissteget
    - Påstanden holder for 0
  - Hvordan bevise induksjonssteget
    - Definere induksjonshypotesen
    - Hvis påstanden holder for n så holder den også for n + 1
      - Bruke induksjonshypotesen

“Matematisk Induksjonsbevis-guiden”

- Vi kaller påstanden vi skal bevise for P, vi skal vise at P holder for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Basissteg: Viser at P holder for n = 0
  - Sett inn 0 for n i påstanden, og regn ut, bekreft at du får det som er forventet.
    - “Basissteg: Viser at P holder for 0: ….”
- Induksjonssteg: Vise at dersom P holder for k, så holder P for k+1
  - Anta at P holder for et vilkårlig tall k, kall dette for induksjonshypotesen (IH)
    - “Induksjonssteg: Antar at P holder for et vilkårlig tall k, dette er induksjonshypotesen…”
  - Skriv ned hva du skal vise,
    - “… skal nå vise at dette fører til at P også holder for k+1 … ”
  - Gjør utregningene som viser dette - denne delen er ulik for ulike beviser
    - For matematisk induksjon innebærer dette ofte å trikse med uttrykket ved hjelp av regneregler
      - En god start er ofte å sette inn k+1 for n i påstanden, og se hva som skjer
    - Felles for alle bevis: *Her må du på et eller annet tidspunkt bruke induksjonshypotesen*
- Konklusjon
  - Avslutt med en kort konklusjon som forteller hva du har bevist og hvordan
    - “… ved induksjon følger det at P holder for alle $n \in \mathbb{N}$”.

Eksempel

Bevis påstanden “2n er et partall for alle naturlige tall n”.

Basissteg:

Påstanden holder for n = 0,
2*0 = 0 og 0 er et partall ✅

Induksjonssteg:

Antar at påstanden er sann for et vilkårlig naturlig tall k.
Altså at 2k er et partall. Dette er induksjonshypotesen.

Skal vise at påstanden holder for 2(k+1), altså at 2(k+1) er et partall

- 2(k + 1) = 2k + 2 *ved å gange ut parentesen*
- Vi har antatt at 2k er et partall (*induksjonshypotesen*)
- Per definisjon er et partall addert med tallet 2 også et partall.
- Da er 2k + 2 også et partall.

Konklusjon: Ved matematisk induksjon følger det at 2n er et partall for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave

11.8 Bevis ved matematisk induksjon at

$$6^n - 1$$

er delelig med 5 for alle naturlige tall n.

Oppgave 11.8

At $6^n - 1$ er delelig med 5, kan settes opp slik: $(6^n - 1) / 5 = y$, der y er et heltall.

- Basissteget:
  - Viser at påstanden holder for n = 0
  - $(6^0 - 1) / 5 = (1 - 1) / 5 = 0$, 0 er et heltall ✅

- Induksjonssteget:
  - Antar at påstanden holder for n = k, altså at $(6^k - 1) / 5 = y$, der y er et heltall. Dette er *induksjonshypotesen (IH)*.
  - Skal vise at da må også $(6^{(k+1)} - 1) / 5$ også være et heltall

  - $(6^{(k+1)} - 1) / 5 = (6 * 6^k - 1) / 5$ (ved å gange ut potensen)
  - $= (6 (6^k - 1) + 5) / 5$ (regneregler, trekke *6 ut)
  - $= (6 * (6^k - 1)) / 5 + 5/5$ (brøkregler)
  - $= 6y + 1$ (ved bruk av IH)
  - Siden y er et heltall, er også 6y + 1 et heltall.

- Konklusjon: Ved matematisk induksjon følger det at $6^n - 1$ er delelig med 5 for alle naturlige tall n.

Strukturell induksjon

- Nå skal vi utvide horisonten til alle induktivt definerte mengder
- Målet er å kunne vise at en påstand er sann for alle elementene i en slik mengde
- Hvordan fungerer strukturell induksjon?
  - Prinsippet det er samme som i matematisk induksjon, men vi jobber med alle induktivt definerte mengder, vi begrenser oss altså ikke kun til de naturlige tallene
- Det er to punkter vi aldri må glemme
  - 1. Basissteget - vis at påstanden holder for alle elementene i basismengden
  - 2. Induksjonssteget - vise at dersom påstanden holder for x_1, x_2, ... , x_n, og x forekommer fra disse, så holder den også for x.
  - Ikke glem konklusjonen til slutt

Strukturell induksjon på mengder

- Bitstrenger (se definisjon 9.9, side 107)
  - Basissteget: Vise at påstanden holder for 0 og 1.
  - Induksjonssteget: Består av to deler, fordi det er to induktive steg
    - Hvis påstanden holder for b, så holder den for b0
    - Hvis påstanden holder for b, så holder den for b1

- Utsagnslogiske formler (se definisjon 9.4, side 103)
  - Basissteget: Vise at påstanden holder for alle utsagnsvariabler P (P kan stå for alle utsagnsvariabler)
  - Induksjonssteget: Består her av fire deler, fordi det er fire induktive steg
    - Hvis påstanden er sann for F og G, så er den sann for
    - 1. $(F \wedge G)$, 2. $(F \vee G)$, 3. $(F \rightarrow G)$ og 4. $\neg F$

Strukturell induksjon på mengder

- Strenger (se definisjon 9.7 side 105)
  - Basissteget: Påstanden holder for den tomme strengen, Λ
  - Induksjonssteget: Hvis at hvis påstenden holder for en streng s, så holder den også for sx

- Lister (se definisjon 9.5, side 103)
  - Basissteget: Påstanden holder for den tomme listen, ()
  - Induksjonssteget: Vise at hvis påstanden holder for en liste, L,
    så holder den også for (x : : L)

- Binære trær (se definisjon 9.6, side 104)
  - Basissteget: Påstanden holder for det tomme binære treet ()
  - Induksjonssteget: Hvis påstanden holder for to binære trær V og H,
    så holder den også for treet (V, x, H)

Oppgave

12.4 La B være språket over alfabetet $\{(,)\}$ som er induktivt definert slik:

- $\Lambda \in B$
- Hvis $X \in B$ og $Y \in B$, så $XY \in B$.
- Hvis $X \in B$, så $(X) \in B$.

(a) Forklar med egne ord hvordan elementene i mengden B ser ut.

(b) Bevis ved strukturell induksjon at for alle $X \in B$, er det slik at antall tegn i X er et partall.

Oppgave 12.4

Oppgave

12.4 La B være språket over alfabetet $\{(,)\}$ som er induktivt definert slik:

- $\Lambda \in B$
- Hvis $X \in B$ og $Y \in B$, så $XY \in B$.
- Hvis $X \in B$, så $(X) \in B$.

(a) Forklar med egne ord hvordan elementene i mengden B ser ut.
(b) Bevis ved strukturell induksjon at for alle $X \in B$, er det slik at antall tegn i X er et partall.

a) (), ()(), (()), ()()(), ()(()), ((())), (()()) ...
Vi kan si at vi får mengden av balanserte uttrykk. Vi har alltid like mange høyreparenteser som venstreparenteser, og alle parentesene kan lukkes.

b)

Basissteget: Λ inneholder 0 tegn, 0 er et partall. Dermed holder påstanden for basismengden.

Induksjonssteget: Antar at påstanden holder for X og Y. Dette er induksjonshypotesen (IH).
Fra denne antagelsen skal vi vise at påstanden også holder for XY og (X).
XY: Antall tegn i XY er antall tegn i X pluss antall tegn i Y. Fra IH har vi at det er partall tegn i X og partall tegn i Y. Vi vet at summen av to partall er et partall. Dermed er det også partall antall tegn i XY.
(X): Antall tegn i (X) er antall tegn i X pluss 2. Fra IH har vi at det er partall antall tegn i X. Vi vet at om vi legger til 2 på et partall, får vi et partall. Dermed er det også partall antall tegn i (X).

Konklusjon: Ved strukturell induksjon følger det at for alle $X \in B$, er det partall antall tegn i X.

12.6 La funksjonen ANTI på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\text{ANTI}(P) &= \neg P \\
\text{ANTI}(\neg F) &= \neg\, \text{ANTI}(F) \\
\text{ANTI}(F \wedge G) &= (\text{ANTI}(F) \vee \text{ANTI}(G)) \\
\text{ANTI}(F \vee G) &= (\text{ANTI}(F) \wedge \text{ANTI}(G)) \\
\text{ANTI}(F \to G) &= (\neg\text{ANTI}(F) \wedge \text{ANTI}(G))
\end{aligned}$$

(a) Regn ut $\text{ANTI}(P \vee \neg P)$ og $\text{ANTI}(\neg P \to Q)$.

(b) Forklar med egne ord hva funksjonen gjør.

(c) Bevis ved strukturell induksjon at $\text{ANTI}(\text{ANTI}(F))$ er ekvivalent med F, for alle utsagnslogiske formler F.

(d) Er det slik at $\text{ANTI}(\text{ANTI}(F)) = F$, for alle utsagnslogiske formler F?

Oppgave 12.6 a + b

a)

```
ANTI(P ∨ ¬P) = (ANTI(P) ∧ ANTI(¬P))        def ANTI(F ∨ G)
             = (¬P ∧ ¬ANTI(P))             def ANTI(P) og ANTI(¬F)
             = (¬P ∧ ¬¬P)                  def ANTI(P)

ANTI(¬P → Q) = (¬ANTI(¬P) ∧ ANTI(Q))       def ANTI(F → G)
             = (¬¬ANTI(P) ∧ ANTI(Q))       def ANTI(¬F)
             = (¬¬¬P ∧ ¬ Q)                def ANTI(P)
```

b) Funksjonen gir en formel som har motsatt sannhetsverdi som formelen som sendes inn.

Oppgave 12.6 c

Basissteget: Vise at påstanden holder for en utsagnsvariabel P:

`ANTI(ANTI(P)) = ANTI(¬P) = ¬ANTI(P) = ¬¬P`. ¬¬P er ekvivalent med P.

Induksjonssteget: Antar at påstanden holder for formlene F of G. Altså at `ANTI(ANTI(F))` er ekvivalent med `F` og `ANTI(ANTI(G))` er ekvivalent med `G`. Dette er induksjonshypotesen (IH).

Den induktive definisjonen av utsagnslogiske formler har fire induktive steg, vi må vise at påstanden holder for hvert av disse fire stegene:

(1): Vise at `ANTI(ANTI(¬F))` er ekvivalent med `¬F`

(2): Vise at `ANTI(ANTI((F ∧ G)))` er ekvivalent med `(F ∧ G)`

(3): Vise at `ANTI(ANTI((F ∨ G)))` er ekvivalent med `(F ∨ G)`

(4): Vise at `ANTI(ANTI((F → G)))` er ekvivalent med `(F → G)`

Oppgave

12.2 La g være en funksjon fra bitstrenger til heltall definert rekursivt på følgende måte:

- $g(0) = 1$ og $g(1) = -1$
- $g(b0) = g(b) + 1$
- $g(b1) = g(b) - 1$

```
- f(0) = 1 og f(1) = 0
- f(b0) = f(b)1
- f(b1) = f(b)0
```

(a) Hva gjør denne funksjonen?

(b) Hva er $g(100)$?

(c) Bevis ved induksjon at $g(b) + g(f(b)) = 0$ for alle bitstrenger b, hvor f er funksjonen definert i forrige oppgave.

Oppgave 12.2

(a) Funksjonen teller antall forekomster av 0 minus antall forekomster av 1

(b) g(100) = g(10) + 1 = g(1) + 1 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1

(c)

- Basissteg: Påstanden holder for b = 1 og b = 0
  - g(0) + g(f(0)) = g(0) + g(1) = 1 + (-1) = 0
  - g(1) + g(f(1)) = g(1) + g(0) = (-1) + 1 = 0
- Induksjonssteg: Anta at påstanden holder for en bitstreng b, det vil si at g(b) + g(f(b)) = 0. (IH). Skal vise at da holder påstanden for b0 og b1.
  - b0: g(b0) + g(f(b0)) = g(b0) + g(f(b)1) *def f(b0)*
  - = g(b) + 1 + f(f(b)) -1 *def g(b0) og g(b1)*
  - = g(b) + g(f(b)) *regning*
  - = 0 *IH*

  - b1: g(b1) + g(f(b1)) = g(b1) + g(f(b)0) *def f(b1)*
  - = g(b) - 1 + f(f(b)) +1 *def g(b1) og g(b0)*
  - = g(b) + g(f(b)) *regning*
  - = 0 *IH*
- Konklusjon: Ved induksjon følger det at g(b) + g(f(b)) =0 for alle bitstrenger b.