Oppgaver til kapittel 9

9.1 La $U = \{a, b, c, d\}$, og la R være relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på U.

(a) Hva er den refleksive tillukningen av R?
(b) Hva er den symmetriske og transitive tillukningen av R?

9.2 La $A = \{1, 2, 3\}$. Forklar hvorfor man ikke kan ta den *irrefleksive* tillukningen av relasjonen $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ på A.

9.3 For hver av følgende induktive definisjoner, begynn med basismengden og konstruer de første ti elementene i mengden.

(a) *Basismengde:* $\{0\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $x - 1$ med.
(b) *Basismengde:* $\{3\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $3 \cdot x$ og $(3 \cdot x) + 1$ med.

Her er $+$, $-$ og $\cdot$ de vanlige aritmetiske operasjonene på tall: addisjon, subtraksjon og multiplikasjon.

9.4 Finn induktive definisjoner for mengdene nedenfor. For eksempel kan mengden $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ defineres induktivt som den minste mengden A som er slik at $0 \in A$ og hvis $x \in A$, så $x + 2 \in A$. Definér mengden slik at basismengden består av ett element for (a) og to elementer for (b).

(a) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
(b) $\{a, b, ab, bb, abb, bbb, abbb, bbbb, \ldots\}$

Oppgaver til kapittel 10

10.1 Gi en rekursiv definisjon av hver av følgende funksjoner på $\mathbb{N}$. Regn også ut de åtte første verdiene for hver funksjon. For eksempel kan funksjonen $f(n) = 2 \cdot n$ defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 2$.

(a) $f(n) = 3 \cdot n + 1$ (b) $f(n) = n^2$

10.2 La alfabetet $A = \{\mathtt{t}, \mathtt{a}, \mathtt{o}\}$. La funksjonen $\mathcal{T}$ fra A^* til heltallene være definert rekursivt ved:

$$\mathcal{T}(\Lambda) = 0$$

$$\mathcal{T}(s\mathtt{t}) = \mathcal{T}(s) + 1, \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{a}) = \mathcal{T}(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{o}) = \mathcal{T}(s) - 1$$

der $s \in A^*$.

(a) Regn ut $\mathcal{T}(\mathtt{t})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tatt})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tao})$ og $\mathcal{T}(\mathtt{ottato})$
(b) Forklar kort med egne ord hva $\mathcal{T}$ gjør.

10.3 Vi definerer funksjonen b på mengden av bitstrenger (slik denne mengden er definert i Logiske metoder) slik at den bytter enhver forekomst av $\mathtt{0}$ med $\mathtt{1}$ og vice versa. For eksempel har vi at $b(\mathtt{0}) = \mathtt{1}$, $b(\mathtt{110}) = \mathtt{001}$ og $b(\mathtt{1011100}) = \mathtt{0100011}$. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen b.

10.4 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathcal{W}$ fra utsagnslogiske formler til naturlige tall, slik at $\mathcal{W}$ teller antall forekomster av konnektivet $\wedge$. Her er noen eksempler:

$$\mathcal{W}\big((P \wedge Q)\big) = 1 \qquad \mathcal{W}\big(((P \to Q) \vee R)\big) = 0 \qquad \mathcal{W}\big((P \wedge (Q \wedge P))\big) = 2$$