Oppgaver til kapittel 11

11.1 La f være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall n. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis **basissteget**, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall n, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Bruk **induksjonshypotesen** til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkludér og si hva du har bevist.

11.2 I denne og neste oppgave skal bruke matematisk induksjon til å vise at påstanden

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$$

er sann for alle naturlige tall.

(a) Presisér hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

11.3 Se forrige oppgave.

(a) Presisér hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

11.4 Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? Tips: Dette har mest har å gjøre med *formen* på argumentet.

*Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million. Basissteget går slik: Tallet 0 er klart **mye mindre** enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for n, det vil si at n er **mye mindre** enn én million. Dette er induksjonshypotesen. Vi skal vise at påstanden også holder for $n + 1$. Siden n er **mye mindre** enn én million, må også $n + 1$ være det, fordi $n + 1$ bare er bitte litt større enn n. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million.*

Oppgaver til kapittel 12

12.1 La S være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

(a) Presisér hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.2 Se forrige oppgave.

(a) Presisér hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

12.3 La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg\textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \wedge G)) &= (\textsc{flip}(G) \wedge \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \vee G)) &= (\textsc{flip}(G) \vee \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på F og G.)

I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er *ekvivalent* med F, for alle utsagnslogiske formler F. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.

(a) Presisér hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.4 Se forrige oppgave.

(a) Presisér hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.