Oppgaver til kapittel 19

19.1 (a) Åge Rant har ni sjongleringsballer som alle har forskjellige farger. Han har fire forskjellige skuffer å legge ballene i. På hvor mange forskjellige måter kan han legge ballene i skuffene? Vi er her kun opptatt av hvilke baller som havner i hvilke skuffer.

(b) Han velger å kjøpe ni nye sjongleringsballer som alle er hvite, og det er umulig å se forskjell på dem. På hvor mange forskjellige måter kan han legge de nye ballene i de fire skuffene sine? Vi er her altså kun opptatt av hvor mange baller som havner i hver skuff.

19.2 La T være mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Hvor mange delmengder av T med nøyaktig ett element finnes det? Hvor mange delmengder av T med nøyaktig to elementer finnes det?

(b) Hvor mange delmengder av T med nøyaktig tre elementer finnes det? Hvor mange delmengder av T med nøyaktig fire elementer finnes det? Hvor mange delmengder av T finnes det totalt?

(c) Forklar hvorfor vi generelt har at

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Hint: Forsøk først å se hvorfor det er slik når $n = 4$ eller $n = 3$.

19.3 Anta mengden A har n elementer, og at $|A| = |B|$. Hvor mange funksjoner $f : A \to B$ finnes det slik at f er bijektiv? Begrunn svaret.

19.4 Tulleland har et romskip som skal reise til Mars med 101 passasjerer. Disse passasjerene skal fordeles på romskipets tre unike kabiner. Hver kabin må ha mellom én og femti passasjerer.

(a) (Oppvarming) Hvor mange fordelinger finnes med én passasjer i den første kabinen? Hvor mange fordelinger finnes med to passasjerer i den første kabinen?

(b) Hvor mange fordelinger finnes det totalt? Det vil si, på hvor mange måter kan passasjerene fordeles i de tre kabinene?

(c) Forklar kort hvordan du regnet ut svaret.

Kommentarer: Vi ser ikke forskjell på passasjerene; vi er kun interessert i antallet passasjerer i hver av de tre kabinene. Vi ser derimot forskjell på kabinene. Det kan for eksempel være femti passasjerer i den første kabinen, førti i den andre, og elleve i den tredje. En annen måte kan være at elleve passasjerer er i den første kabinen, førti i den andre, og femti i den tredje. Husk også at hver kabin må ha minst én, men maksimalt femti, passasjerer.

Oppgaver til kapittel 20

20.1 (a) Angi inversen til relasjonen $\{ \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle \}$ på naturlige tall.
(b) Angi inversen til barnebarnrelasjonen på mengden av alle mennesker.
(c) Angi inversen til relasjonen som er slik at x er relatert til y hvis x ser på y, der x og y er mennesker.
(d) La $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være konstantfunksjonen som alltid gir 4, det vil si at $k(x) = 4$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Forklar hvorfor k ikke har en invers funksjon.

20.2 For hver av følgende grupper, angi identitetselementet og hva som er inversen til et element x.

(a) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
(b) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ den vanlige multiplikasjonsoperasjonen.)

Hvorfor er ikke følgende par av mengder og operasjoner grupper?

(c) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
(d) $\langle \{s \mid s \text{ er en streng over alfabetet } \{0, 1\}\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ konkateneringsoperasjonen, det vil si $s \cdot t = st$.)

20.3 (a) For $x \in \mathbb{R}$, la $\lfloor x \rfloor$ være lik x rundet av nedover til nærmeste heltall. For eksempel vil $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Vis at denne funksjonen er idempotent.
(b) Vis at mengdedifferanseoperasjonen ikke er assosiativ.
(c) Kan vi ha en gruppe $\langle G, \bullet \rangle$ slik at G har null elementer? Hvorfor / hvorfor ikke? Forklar.
(d) Kan vi ha en gruppe $\langle G, \bullet \rangle$ slik at G har ett element? Hvorfor / hvorfor ikke? Forklar.

20.4 La $f : A \to B$ og $g : B \to C$. Vi har at sammensetningen av g og f er gitt ved ved $h : A \to C$ og $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

(a) Anta f og g er injektive. Bevis at h også må være injektiv.
(b) Anta f og g er surjektive. Bevis at h også må være surjektiv.
(c) Anta f og g er både injektive og surjektive. Vis at h har en inversfunksjon.