RELASJONER

$R \subseteq D^n = D \times \ldots \times D$ n-ær relasjon (på D)

$R \subseteq D^2 = D \times D$ binær relasjon

NOTASJON

$R \subseteq D \times D$

$a, b \in D$

$\langle a, b \rangle \in R$

$R(a, b)$

$a \, R \, b$

$[(a = b) = (a, b)]$

$a \longrightarrow b$

BEGREPER $R \subseteq D \times D$

REFLEKSIV

$R(a,a)$ FOR ALLE $a \in D$

SYMMETRISK

$R(a,b) \rightarrow R(b,a)$ FOR ALLE $a,b \in D$

ANTI-SYMMETRISK

$R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow a=b$ FOR ALLE $a,b \in D$

TRANSITIV

$R(a,b) \wedge R(b,c) \rightarrow R(a,c)$ FOR ALLE $a,b,c \in D$

PARTIELL ORDNING

EN PARTIELL ORDNING (P.O.) ER ET PAR (D, R) DER D ER EN MENGDE OG R ER EN BINÆR RELASJON $R \subseteq D \times D$ PÅ D SLIK AT:

R ER
- REFLEKSIV
- TRANSITIV
- ANTI-SYMMETRISK

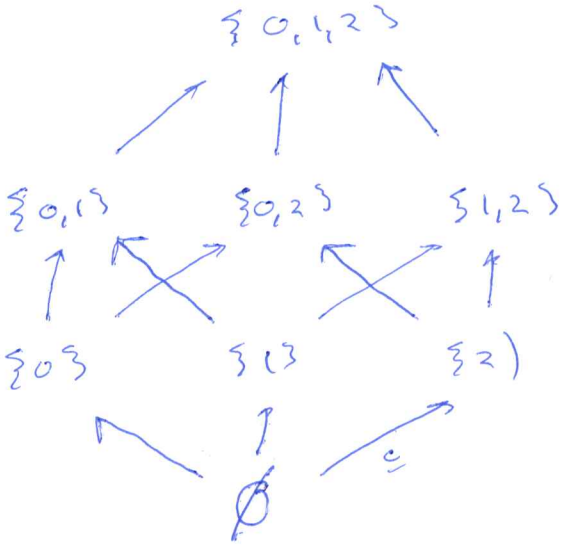
EKSEMPLER

- $(\mathbb{N}, \leq)$



- ~~$\{0,1,2,3\}$~~ $(\mathcal{P}(\{0,1,2,3\}), \subseteq)$

DER $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ ER MENGDEN AV ALLE DELMENGDER AV $\{0,1,2,3\}$



- $(\{0,1,2\}, =)$

LIKHETSRELASJONEN

$= = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$







KARTESISK PRODUKT:

$D^2 = D \times D = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in D\}$

$D^4 = D \times D \times D \times D = \{\langle a,b,c,d\rangle \mid a,b,c,d \in D\}$

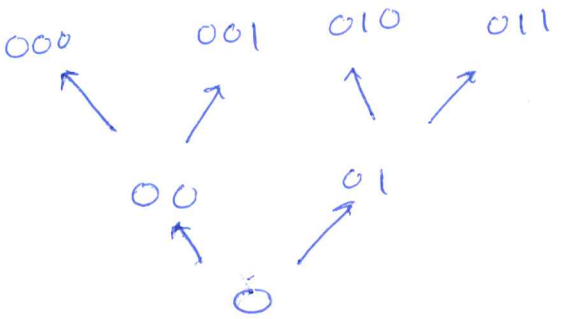
$D^1 = D = \{a \mid a \in D\}$

$D^0 = \{e\}$

|

den tomme lista.

TRÆR:



LINEÆR ORDNING

EN | LINEÆR ORDNING | ER EN P.O (D, R)
| TOTAL

SLIK AT: $R(a,b) \vee R(b,a)$ FOR ALLE $a, b \in D$.

EKVIVALENS RELASJON

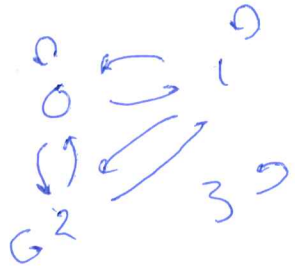
ER EKVIVALENS RELASJON (D, R) ER

EN RELASJON $R \subseteq D \times D$ SLIK AT:

- R REFLEKSIV
- R TRANSITIV
- R SYMMETRISK

EX: $(\{0,1,2,3\}, R)$

R GITT VED:



$[2]$
$=$
$[1]$
$=$
$[0] = \{0,1,2\}$

$[3] = \{3\}$

- Hvis $R(a,b)$ (så $R(b,a)$)

  så sier vi (ofte) at a og b er ekvivalente (mht R).

- mengden av alle elementer som er ekvivalente med a kalles en

  ekvivalens klasse

$$[a] = \{ b \in D \mid R(a,b) \}$$

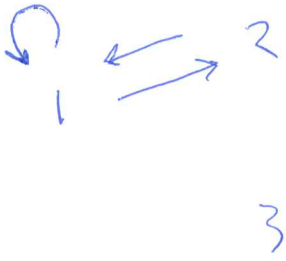
Ex $(\mathbb{N}, =)$ $\quad [10] = \{10\}$

Pause → 15:25

REGNE OPPGAVER

6.1 (f) $D = \{1, 2, 3\}$

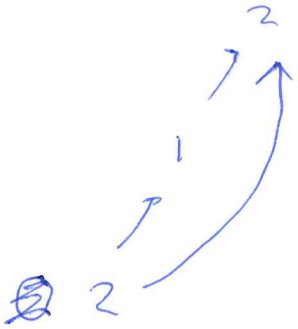
$R_c = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$



REFLEKSIV	X	(NEI)
SYMMETRISK	✓	(JA)
TRANSITIV	X	
ANTI-SYMMETRISK	X	
IRREFLEKSIV	X	
P.O ?	X	
EKV. REL?	X	

$R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow R(a,c)$

$R(2,1) \wedge R(1,2) \not\rightarrow R(2,2)$



a

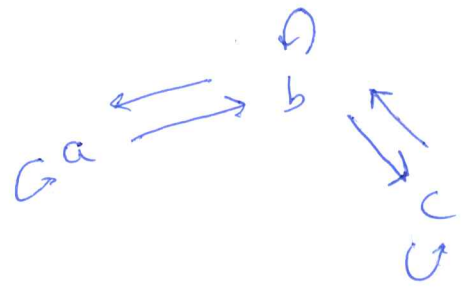
6.2

FINN EKSEMPLER

a) REFLEKSIV, SYMMETRISK OG TRANSITIV

$(\mathbb{N}, =)$ ✓

b) REFLEKSIV, SYMMETRISK, MEN IKKE TRANSITIV



Refleksiv ✓

Ikke transitiv ✓

Symmetrisk ✓

c) REFLEKSIV, IKKE SYMMETRISK, OG TRANSITIV



Refleksiv ✓

Ikke symetrisk ✓

Transitiv ✓

X) ER IKKE-SYMMETRISK OG ANTI-SYMMETRISK DET SAMME ??? – NEI

ANTI-SYMMETRISK: $R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow a = b$ for alle a, b.

$(\mathbb{N}, =)$ (SE NEDERST ↓)

6.7

a) $R \subseteq D \times D$
$S \subseteq D \times D$
} EKVIVALENSRELASJONER

La $T = R \cap S$ $\quad T = \{ \langle a,b \rangle \in D \times D \mid \langle a,b \rangle \in R$ og $\langle a,b \rangle \in S \}$

Vis at T er en ekvivalensrelasjon!

Må vise: T refleksiv, T symmetrisk, T transitiv.

T refleksiv:

Må vise at for alle $a \in D$ så $\langle a,a \rangle \in T$.

Gitt $a \in D$, så er $\langle a,a \rangle \in R$ og $\langle a,a \rangle \in S$,

siden R og S er ekvivalensrelasjoner.

Men da er $\langle a,a \rangle \in T$ (siden $T = R \cap S$). ✓

T SYMMETRISK

MÅ VISE $\langle a,b\rangle \in T$ SÅ $\langle b,a\rangle \in T$. FOR ALLE $a,b \in D$.

~~ANTA~~

GITT $a,b \in D$, ANTA AT $\langle a,b\rangle \in T$.

SIDEN $T = R \cap S$, SÅ ER $\langle a,b\rangle \in R$ OG $\langle a,b\rangle \in S$.

R OG S ER SYMMETRISKE.

SÅ $\langle b,a\rangle \in R$, $\langle b,a\rangle \in S$

SÅ DA ER $\langle b,a\rangle \in T$. ✓

T TRANSITIV PÅ LIGNENDE MÅTE

IRREFLEKSIV – IKKE REFLEKSIV, ANTI-SYMMETRISK – IKKE SYMMETRISK

Relasjon $R \subseteq D \times D$

IRREFLEKSIV: For ALLE $a \in D$ så er $\langle a,a \rangle$ ikke i R.

REFLEKSIV: For alle $a \in D$ så er $\langle a,a \rangle$ i R.

IKKE REFLEKSIV: DET ER IKKE SLIK AT FOR ALLE $a \in D$ så $\langle a,a \rangle \in R$

DVS DET FINNES EN $a \in D$ SLIK AT $\langle a,a \rangle \notin R$.

Eksempel på ikke-refleksiv, men ikke irrefleksiv:



- Hvis D har minst ett element så

IRREFLEKSIV $\Rightarrow$ IKKE REFLEKSIV

SYMMETRISK

For alle $a, b \in D$ hvis $\langle a,b\rangle \in R$ så $\langle b,a\rangle \in R$

IKKE SYMMETRISK

DET ER IKKE SLIK AT FOR ALLE $a,b \in D$ HVIS $\langle a,b\rangle \in R$

SÅ $\langle b,a\rangle \in R$

PLUS AT DET FINNES $a,b \in D$ SLIK AT $\langle a,b\rangle \in R$ MEN

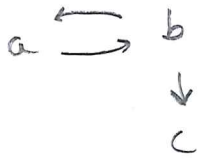
$\langle b,a\rangle \notin R$.

ANTI-SYMMETRISK

FOR ALLE $a,b \in D$, HVIS $\langle a,b\rangle \in R$ OG

$\langle b,a\rangle \in R$ SÅ $a = b$.

- EKSEMPEL IKKE SYMMETRISK MEN IKKE ANTI-SYMMETRISK:



- EKSEMPEL ANTI-SYMMETRISK MEN (IKKE IKKE) SYMMETRISK

