(FORMELL) SEMANTIKK FOR F.O.L

konst. symb. funk. symb. rel. symb.

SIGNATUR $\quad f \qquad\qquad I$

$$\langle a, b, c, \ldots ; f, g, h, \ldots ; P, Q, R \rangle$$

For: uformell tolkning

$$\langle e, s ; - ; G : 1, P : 1 \rangle$$

Vi snakker om mennesker

a - Andrebrev

s - søskenbarn

G - Gresker

P - Per

$P(s)$ - falsk

$\forall x (G(x) \rightarrow P(x))$ - falsk

ANNEN TOLKNING

Vi snakker om figurer i Donald

a - Reffe Anton

s - onkel Skrue

G - rikest i Andeby

P - and

$P(s)$ - sant

$\forall x (G(x) \rightarrow P(x))$ - sant

FORMELT:

EN MODELL $\mathcal{M}$ (~~SIGNATUR~~ STRUKTUR) FOR ET F.O. SPRÅK

ER GITT VED:

- EN MENGDE D, KALT "DOMENE"

  SKRIVES OGSÅ $|\mathcal{M}|$

  IKKE TOMT.

- FOR HVERT KONSTANTSYMBOL a, ET ELEMENT

$$a^{\mathcal{M}} \in D$$

- FOR HVERT FUNKSJONSSYMBOL $f : n$, EN FUNKSJON

$$f^{\mathcal{M}} : D^n \longrightarrow D$$

- FOR HVERT RELASJONSSYMBOL $R : n$, EN RELASJON

$$R^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$$

- FOR HVER UTSAGNSVARIABEL p, EN SANNHETSVERDI

$$p^{\mathcal{M}} \in \{0, 1\}$$

LUKKET

ATOMÆR FORMEL : $R(t_1, \dots, t_n)$

↗
INGEN FRIE VARIABLE.

- TOLKNING AV LUKKET TERM t GITT INDUKTIVT VED

  - $t = a$ KONSTANT SYMBOL

    $$t^{\mathcal{M}} = a^{\mathcal{M}}$$

  - $t = f(t_1 .. t_n)$,

    $$t^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$$

- $R(t_1, \dots, t_n)$ ER SANN I $\mathcal{M}$

  HVIS $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$

  ELLES FALSK.

SKRIVER $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ FOR

"$R(t_1, \dots, t_n)$ ER SANN I $\mathcal{M}$".

SAMMENSATTE UTSAGN

PROBLEM $\forall x\, P(x)$ VIL HA EN GOD MÅTE Å SI "P ER SANN FOR ALLE TING I $|M|$".

VI LEGGER TIL NYE KONSTANTSYMBOLER (TIL SIGNATUREN) FOR HVER TING I DOMENET:

LEGGER TIL $\{ \bar{d} \mid d \in |M| \}$

↑ MODELLEN

UTVIDER MODELLEN M MED:

$\bar{d}^M = d \in |M|$

TRENGER BEGREPET:

SUBSTITUSJON

HVIS t ER EN TERM OG $Q(x)$ ER EN FORMEL, SÅ ER

$Q[^t/_x]$ (BOKA: $Q[x/t]$)

FORMELEN DU FÅR VED Å BYTTE UT EN HVER FRI FOREKOMST AV x MED t.

Ex $t = f(a)$ $Q(x) = R(x,b) \wedge \forall x (Q(x,y))$

$Q[^t/_x] = R(f(a), b) \wedge \forall x\, Q(x,y)$

t ikke FOR x

$\phi[x/t]$ — BOKA

ANDRE MÅTER: $\phi[x \setminus t]$

$\phi[t/x]$

- SANNHETSVERDIEN TIL EN LUKKET FORMEL

ϕ (I EN MODELL $\mathcal{M}$) ER GITT INDUKTIVT VED:

- $\phi = R(t_1 \dots t_n)$ SOM OVER ~~GJORT TIDLIGERE~~

- $\phi = \psi \wedge \chi$: $\psi \wedge \chi$ ER SANN I $\mathcal{M}$,

SKRIVER: $\mathcal{M} \models \psi \wedge \chi$

HVIS BEGGE ER SANNE

$\mathcal{M} \models \psi$ OG $\mathcal{M} \models \chi$

- $\phi = \psi \vee \chi$: $\mathcal{M} \models \psi \vee \chi$ HVIS

$\mathcal{M} \models \psi$ ~~ELLER~~ ELLER $\mathcal{M} \models \chi$

- $\phi = \psi \rightarrow \chi$: $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \chi$ HVIS

"ψ IKKE I" SANN I $\mathcal{M}$ → $\mathcal{M} \not\models \psi$ ELLER $\mathcal{M} \models \chi$

- $\varphi = \neg\psi$: $\mathcal{M} \models \neg\psi$ HVIS $\mathcal{M} \not\models \psi$

  ↓

  ψ ER FALSK I $\mathcal{M}$.

- $\varphi = \forall x\, \psi(x)$: $\mathcal{M} \models \forall x\, \psi(x)$ HVIS

  FOR ALLE $d \in |\mathcal{M}|$ SÅ

  $\mathcal{M} \models \psi[\bar{d}/x]$

  ↓

  KAN SKRIVE $\psi(\bar{d})$

- $\varphi = \exists x\, \psi(x)$: $\mathcal{M} \models \exists x\, \psi(x)$ HVIS

  DET FINNES $d \in |\mathcal{M}|$ SLIKT

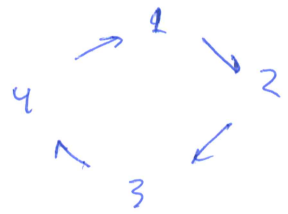
  $\mathcal{M} \models \psi(\bar{d})$

EKSEMPEL:

SIGNATUR: $\langle -; -; R:2 \rangle$

$\mathcal{M}$: $|\mathcal{M}| = \{1,2,3,4\}$

$R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$



$\mathcal{M} \models R(\bar{1}, \bar{2})$

$\mathcal{M} \not\models R(\bar{1}, \bar{1})$

($\bar{1}$ ER ET (NYTT) KONSTANTSYMBOL I SPRÅKET.

$1 \in |\mathcal{M}|$

$\bar{1}^{\mathcal{M}} = 1$)

$\forall x \exists y \, R(x,y)$

$\mathcal{M} \models \forall x \exists y \, R(x,y)$ HVIS FOR ALLE $d \in \{1,2,3,4\}$

SÅ $\mathcal{M} \models \exists y \, R(\bar{d}, y)$

HVIS DET FINNS $c \in \{1,2,3,4\}$ SLIK AT

$\mathcal{M} \models R(\bar{d}, \bar{c})$

HVIS $\langle d, c \rangle \in R^{\mathcal{M}}$

$\exists x \forall y \, R(x,y)$?

NOEN BEGREPER OG NOTASJON:

- $\mathcal{M} \models \varphi$ – φ er sann i modellen $\mathcal{M}$.

- φ er GYLDIG – for alle modeller $\mathcal{M}$, $\models \varphi$ / $\mathcal{M} \models \varphi$.

- φ er FALSIFISERBAR – φ er ikke GYLDIG $\not\models \varphi$

- φ er KONTRADIKTORISK – φ er falsk i alle modeller

- φ er en LOGISK KONSEKVENS av $\psi_1, \dots, \psi_n$ – For alle modeller $\mathcal{M}$, / $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ Hvis $\mathcal{M} \models \psi_1, \dots, \mathcal{M} \models \psi_n$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.

- φ og ψ er LOGISK EKVIVALENTE $\varphi \not\models \psi$ – $\varphi \models \psi$ og $\psi \models \varphi$ / $\varphi \Leftrightarrow \psi$

EX:

RELASJONS SYMBOL

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$$

MOTEEKSEMPEL: $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

$$P^{\mathcal{M}} = \{a\}$$

IKKE GYLDIG (FALSIFISERBAR)

MEN OPPFYLBAR: $|\mathcal{N}| = \{a, b\}$

$$P^{\mathcal{N}} = \emptyset$$

$$\mathcal{N} \not\models \exists x\, P(x)$$

$$\mathcal{N} \models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$$

$$\exists x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$$

LA $\mathcal{M}$ VÆRE EN VILKÅRLIG MODELL.

ENTEN ER $P^{\mathcal{M}} = |\mathcal{M}|$ ELLER IKKE

HVIS $P^{\mathcal{M}} = |\mathcal{M}|$ SÅ $\mathcal{M} \models \forall x\, P(x)$.

VELG $d \in |\mathcal{M}|$. DA $\mathcal{M} \models P(\bar{d}) \rightarrow \forall x\, P(x)$. $\rightsquigarrow$ DA $\mathcal{M} \models \exists x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$.

HVIS $P^{\mathcal{M}} \neq |\mathcal{M}|$, DA FINS $d \in |\mathcal{M}|$ SLIK AT $d \notin P^{\mathcal{M}}$

DVS AT $\mathcal{M} \not\models P(\bar{d})$

. MEN DA $\mathcal{M} \not\models P(\bar{d}) \rightarrow \forall x\, P(x)$

SÅ $\mathcal{M} \not\models \exists x\, (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$.

LIKHETSTEGNET $=$

NÅR SPRÅKET "HAR LIKHET" SÅ HAR VI

SYMBOLET $=$ (MED AKKURAT 2),

OG DET TOLKES ALLTID SOM LIKHET.

(DET FINNES OGSÅ UNNTAK ALTERNATIV, MEN DET HOPPER VI OVER)

EX

$\langle 0, 1, 2, 3, \ldots ; + : 2 ; - \rangle$ MED LIKHET.

$1 + 1 = 2$

MODELL $\mathcal{M}$: $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

$1^{\mathcal{M}} = a$

TOLKES SOM

ALLE ANDRE KONSTANTSYMBOLER ~~er~~ b.

$+^{\mathcal{M}} : \{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$

$\langle x, y \rangle \mapsto a$

dvs



$a + a = a$

$a + b = a$

$b + a = a$

$b + b = a$

$\mathcal{M} \models 1 + 1 = 2$ dvs $a + a = b$

MEN DET ÄR FALSKT.

NOEN EKVIVALENSER

- $\neg \forall x \, \phi(x) \iff \exists x \, \neg \phi(x)$

(SAMME SOM $\vdash \neg \forall x \, \phi(x) \iff \exists x \, \neg \phi(x)$)

MÅ VISE 1) $\neg \forall x \, \phi(x) \vdash \exists x \, \neg \phi(x)$

2) $\exists x \, \neg \phi(x) \vdash \neg \forall x \, \phi(x)$

- $\neg \exists x \, \phi(x) \iff \forall x \, \neg \phi(x)$

- $\exists x \, (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists x \, \phi(x) \vee \exists x \, \psi(x)$

- $\forall x \, (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall x \, \phi(x) \wedge \forall x \, \psi(x)$

HUSKEREGEL: $\exists$ KAN SES PÅ SOM EN GIGA-ELLER

F.EKS. $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$

$\exists x \, P(x) \iff P(\bar{1}) \vee P(\bar{2}) \vee P(\bar{3})$

F.EKS. $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 4, \ldots\}$

$\exists x \, P(x) \iff$ " $P(\bar{1}) \vee P(\bar{2}) \vee \ldots \vee P(\bar{4}) \vee \ldots$ "

← MEN VI KAN IKKE SKRIVE UENDELIGE FORMLER, MEN "LIKSOM"