# Kapittel 11

## Matematisk induksjon

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

$$1 = 1^2 = 1$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$



• Basissteget:

$$1 = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

• Induksjonssteget:

Anta: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

for en vilkårlig $n \in \mathbb{N}^+$.

↗ Induksjonshypotese

Nå må vi vise at

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}_{n^2} + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

$(n+1) \cdot (n+1) = n^2 + n + n + 1$

$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

Ved Matematisk induksjon følger at

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

for alle positive heltall.

La $P(n)$ bety at påstanden $P$ holder for $n$.

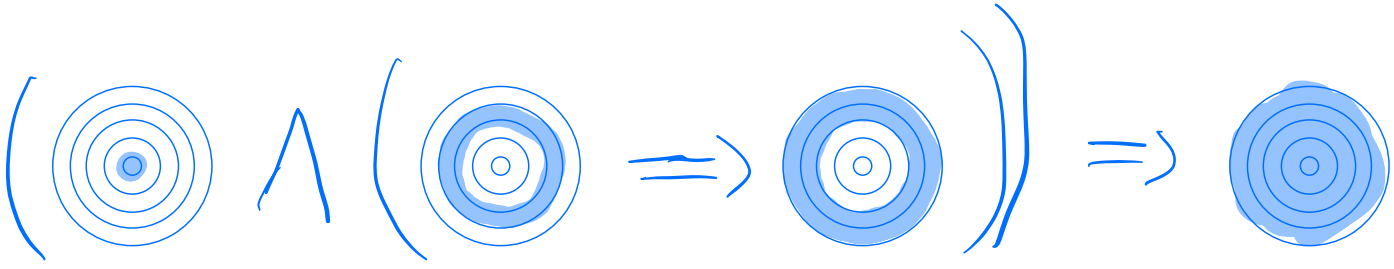
- $P(0)$ ← vis dette
- $P(n) \to P(n+1)$ ↙

$P(0) \to P(1)$

$P(1) \to P(2)$

$P(2) \to P(3)$

⋮



Konklusjon

# Kapittel 12

## Strukturell induksjon

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$0 + 1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$0 + 1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2} = 2 + 1 = 3$$

Basissteget

Induksjonssteg:

Anta at (induksjonshypotesen)

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Må vise

$$\underbrace{0 + 1 + 2 + \cdots + n}_{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$\frac{(n+1)\overbrace{((n+1)+1)}^{(n+2)}}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 2n + n + 2}{2}$$

Disse er like.

Da har vi vist ved matematisk induksjon at $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$() + M = M$

$(x :: L) + M = x :: (L + M)$

konkatinering

$len(()) = 0$

$len(x :: L) = 1 + len(L)$

Vis at

$$len(L + M) = len(L) + len(M)$$

Basis:

$len(() + M) = len(()) + len(M)$

$len(M) = 0 + len(M) = len(M)$

IH: Antar:

$len(L + M) = len(L) + len(M)$

$L$ ↑ vilkårlig liste

IS:

$len((x :: L) + M) = len(x :: L) + len(M)$

$1 + len(L)$

$len(L) + len(M) + 1$

$len(x :: (L + M))$

$1 + len(L + M)$

IH