Kapittel 11

Matematisk induksjon

I matematisk induksjon benytter vi oss av måten naturlige tall er konstruert på: induktivt, steg for steg.

- $0 \in \mathbb{N}$
- Hvis $n \in \mathbb{N}$ så $n+1 \in \mathbb{N}$

Dette gir oss $\{0, 0+1, 0+1+1, \ldots\}$ som er det samme som $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Den induktive definisjonen gir oss kontroll over struktuen.

Et bevis ved matematisk induksjon har en helt spesifikk form:

Basissteget

- Bevis påstanden for 0.

Induksjonssteget

- Bevis at hvis påstanden holder for n (en vilkårlig valgt), så holder påstanden for n+1.

Hvis du lykkes i å bevise begge disse stegene, så sier vi at påstanden er bevist ved matematisk induksjon.

Hvorfor holder dette?

Beviset for basissteget, gir oss at påstanden er sann for 0. Dette gir oss et slags anker.

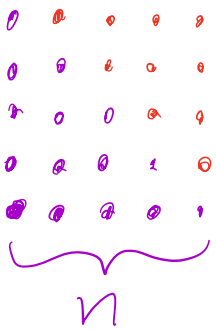
Induksjonssteget gir oss at under antagelsen om at påstanden holder for en vilkårlig valgt n, så holder påstanden for det neste tallet også.

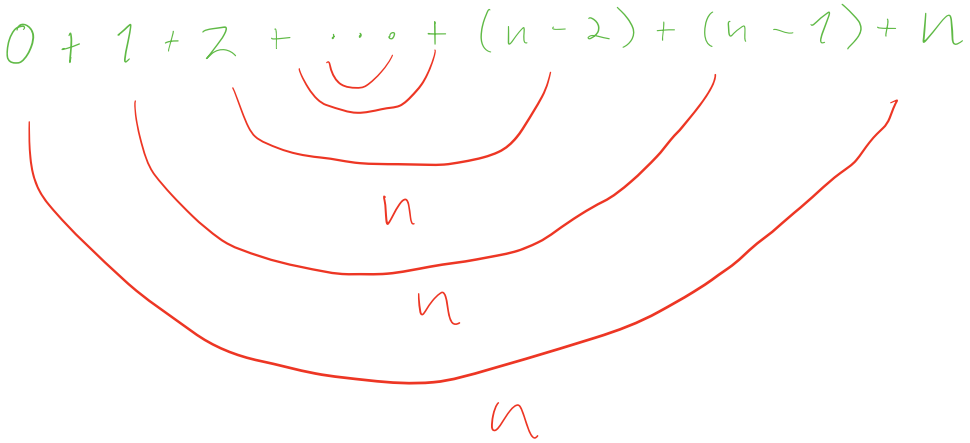
Dette skaper en slags domino effekt, hvor basissteget gir oss et bevis for 0, og induksjons-steget gir et bevis for neste, og neste og neste, ...

Påstand:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Intuisjon





La oss vise at dette mønstret fortsetter.

Basissteg:

$$0 = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Påstanden holder for basissteget.

Induksjonssteget:

Anta at

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der n er et vilkårlig tall i $\mathbb{N}$.

vilkårlig: Vi vet ingenting mer om n enn at det er i $\mathbb{N}$

Vi skal bruke dette til å vise at påstanden holder for $n+1$.

Altså at:

hmm, er ikke dette bare vanskeligere?

$$\underbrace{0+1+2+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Dette har vi antatt

Det er nettopp dette vi kaller induksjonshypotesen!

Da sitter vi igjen med

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)}_{\frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}} = \underbrace{\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{\frac{(n+1)(n+1)+(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{n^2+n+2\cdot n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$= \frac{n^2+2n+1+n+1}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Fra induksjonshypotesen følger det at $0+1+2+\cdots n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

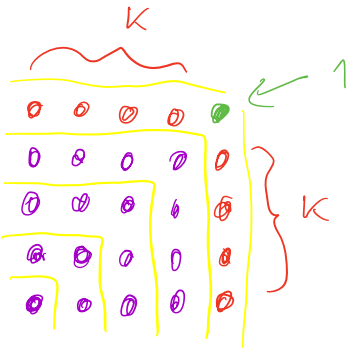
Dermed har bevist ved matematisk induksjon at $0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Det som skjer her er at beviset for 0 er uten antagelsen.

Beviset for 0 gir et bevis for 1.
Beviset for 1 gir et bevis for 2
Beviset for 2 gir et bevis for 3
⋮
Beviset for n gir et bevis for n+1

Vis at summen av de n første oddetallene gir kvadrattallene.

Intuisjon



$k + k + 1 = 2k + 1$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Vi viser påstanden for de positive naturlige tallene, som har 1 som basistilfelle.

Basissteget: $1 = 1^2 = 1$.

Induksjonshypotese:

Anta at

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

for en vilkårlig valgt $n \in \mathbb{N}$.

Induksjonssteget:

Må vise at

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{n^2}+(2n+1)=(n+1)^2$$

Dette kommer fra induksjonshypotesen!

VS: $n^2+(2n+1)=n^2+2n+1$

HS: $(n+1)^2=(n+1)(n+1)=n^2+2n+1$

Fra induksjonshypotesen følger det at

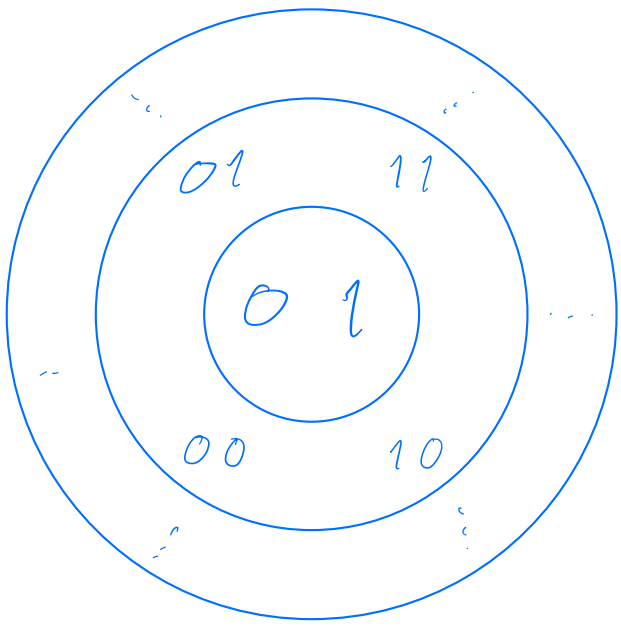
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

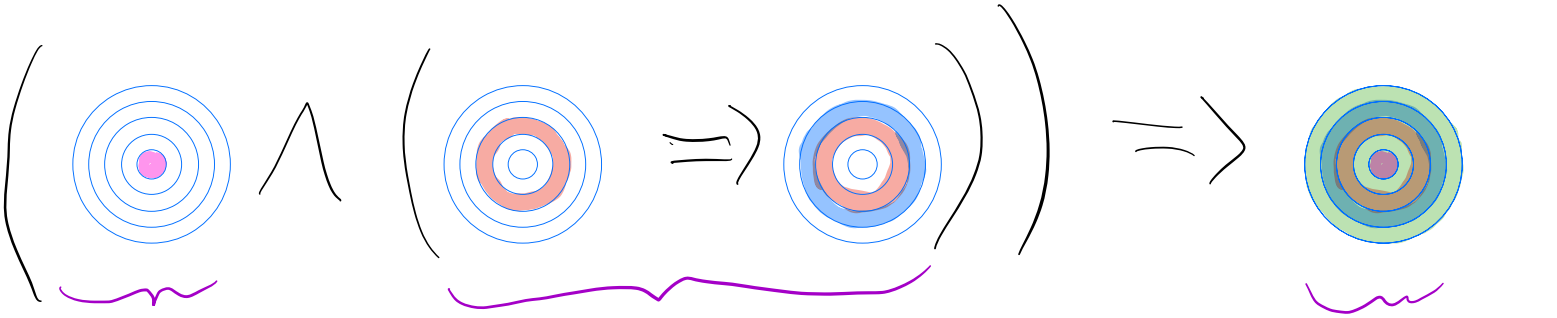
Ved matematisk induksjon har vi bevist at $1+3+\cdots+2n-1=n^2$ for alle $n\in\mathbb{N}$. □

Kapittel 12

Strukturell induksjon

Matematisk induksjon er et eksempel på strukturell induksjon. Vi skal nå se at vi kan bruke den samme metoden for å bevise påstander for alle induktivt definerte mengder.





Den induktive definisjonen legger føringene for hvordan beviset går:

Basissteget: vis påstanden for alle elementene i basismengden

Induksjonssteget: Hvis mengden er lukket under en operasjon som produserer x fra $x_1, x_2, \ldots, x_n$, anta at påstanden holder for $x_1, x_2, \ldots,$ og x_n og vis at påstanden holder for x.

Vis at

$$len(L_1 + L_2) = len(L_1) + len(L_2)$$

Husk at:

$$() + M = M$$

$$(x :: L) + M = x :: (L + M)$$

og

$$len(()) = 0$$

$$len(x :: L) = 1 + len(L)$$

Basistilfælde:

$$len(\underbrace{() + M}_{M}) = \underbrace{len(())}_{0} + len(M)$$

$$len(M) = len(M)$$ OK!

Induksjonshypotese: L er vilkårlig valgt liste

$$len(L + M) = len(L) + len(M)$$

Må vise at

$$len((x :: L) + M) = len((x :: L)) + len(M)$$

Induksjonssteg:

$len((x :: L) + M)$

$= len(x :: (L + M))$ (bruk def av +)

$1 + len(L + M)$ (def av len)

$1 + len(L) + len(M)$ (IH)

$len(x :: L) + len(M)$

$= 1 + len(L) + len(M)$ (def av len)

Ved strukturell induksjon har vi vist at $len(L + M) = len(L) + len(M)$ for alle lister L og M.