4 Avstander mellom bitstrenger [10 poeng]

Vår 2021

La B være mengden av bitstrenger. La $\sim_1$ være relasjonen på B slik at $a \sim_1 b$ hvis a og b er av samme lengde og forskjellige fra hverandre på nøyaktig én posisjon. For eksempel vil $00 \sim_1 01$ og $0011 \sim_1 0111$.

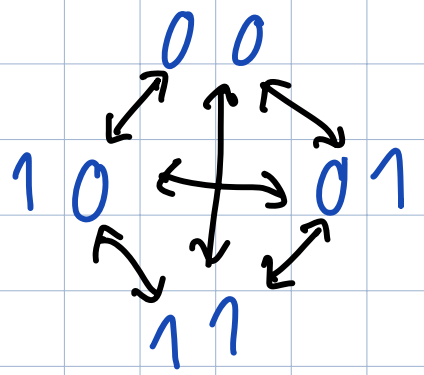
(a) [2 poeng] Anta at $a \sim_1 b$ og $b \sim_1 c$. Må $a \sim_1 c$? Hvis ja, bevis at det alltid er slik; hvis nei, gi et moteksempel.

(b) [2 poeng] La $\sim$ være den transitive tillukningen av $\sim_1$. Relasjonen $\sim$ er en ekvivalensrelasjon. Finn ekvivalensklassene til 01 og 010 (under ekvivalensrelasjonen $\sim$).

(a) $0\,0\,1 \sim_1 0\,1\,1$ (a, b) $\quad 0\,1\,1 \sim_1 1\,1\,1$ (b, c) $\quad 0\,0\,1 \not\sim_1 1\,1\,1$ (a, c)

(b) $[0\,1] = \{0\,1, 0\,0, 1\,1, 1\,0\}$

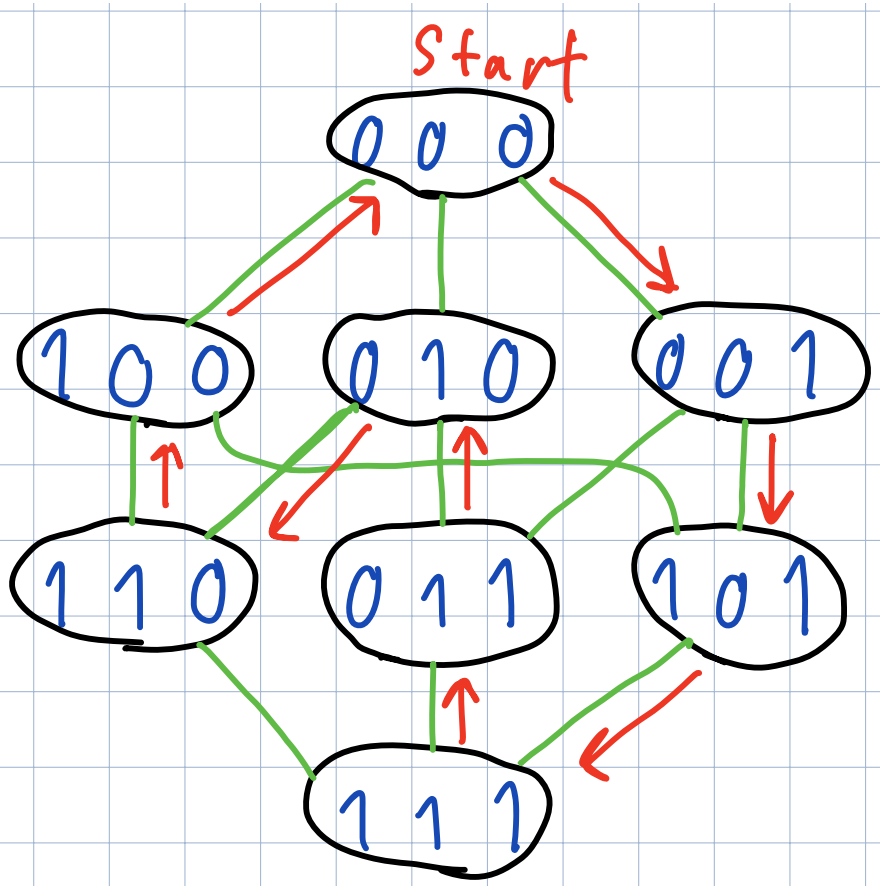
$[0\,1\,0] = \{010, 000, 011, 111, 100, 110, 001, 101\}$

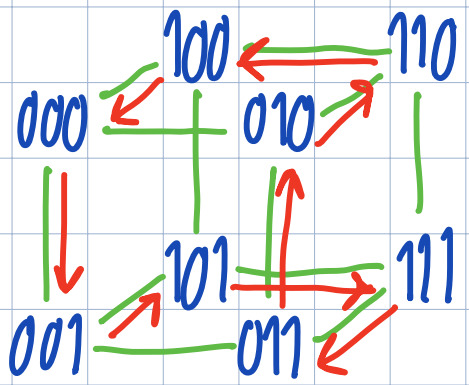


La B_n være mengden av bitstrenger av lengde n, for naturlige tall $n > 0$. For eksempel er B_3 lik mengden $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

(c) [2 poeng] La G_3 være grafen med nodene B_3 og kantene $\{\{a, b\} \mid a \sim_1 b\}$. Finn en hamiltonsykel i G_3. Angi denne ved å skrive nodene i stien etter hverandre med en bindestrek mellom hvert par av noder.

(c)





La d være funksjonen som tar to bitstrenger av samme lengde som argument og som gir *antall posisjoner* bitstrengene er forskjellige på. Verdiområdet til d er altså mengden av naturlige tall. For eksempel vil $d(000, 011) = 2$, fordi 000 og 011 er forskjellige på to posisjoner, $d(10, 11) = 1$, fordi 10 og 11 er forskjellige på én posisjon, og $d(b, b) = 0$, fordi en bitstreng b ikke forskjellig fra seg selv på noen posisjoner.

(d) [2 poeng] Hva blir mengdene $\{x \mid d(000, x) = 2\}$ og $\{x \mid d(111, x) = 1\}$?

Vi generaliserer nå dette og lar $N_k(a) = \{b \mid d(a, b) = k\}$, hvor a er en bitstreng og k er et naturlig tall.

(e) [2 poeng] Regn ut $N_2(0000)$ og $N_5(00000)$.

(d) $\{x \mid d(000, x) = 2\} = \{110, 011, 101\}$

$\{x \mid d(111, x) = 1\} = \{110, 011, 101\}$

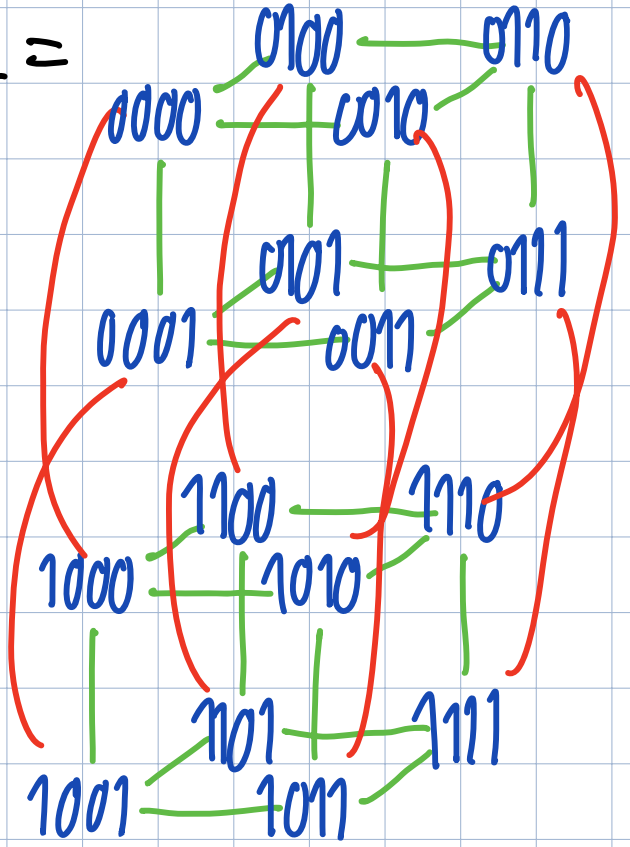
$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$

↑ antall elementer $= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

(e) $N_2(0000) = \{1100, 0011, 0110, 1001, 1010, 0101\}$

$N_5(00000) = \{11111\}$

$G_4 =$



Dette er en hypercube!
(4D kube)

30 Strukturell induksjon [10 poeng] Høst 2018

La M være den minste mengden slik at $\Lambda \in M$ og hvis $s \in M$, så $s0 \in M$ og $s1 \in M$. La f og g være rekursive funksjoner på M definert på følgende måte:

$$f(\Lambda) = \Lambda \qquad g(\Lambda) = \Lambda$$

$$f(s0) = f(s) \qquad g(s0) = g(s)0$$

$$f(s1) = f(s)1 \qquad g(s1) = g(s)$$

La $H(x) = f(g(x))$. Bevis ved strukturell induksjon på M at $H(s) = \Lambda$ for alle $s \in M$.

eksempel:

$f(10011)$
$= f(1001)1$
$= f(100)11$
$= f(10)111$
$= f(1)1111$
$= 1111$

BS: Vis at $H(\Lambda) = \Lambda$

$H(\Lambda) = f(g(\Lambda))$
$= f(\Lambda)$
$= \Lambda$

IH: $H(x) = \Lambda$, for en vilkårlig $x \in M$

IS: Vis at $H(x0) = \Lambda$ og $H(x1) = \Lambda$

$H(x0) = f(g(x0))$ def H
$= f(g(x)0)$ def g
$= f(g(x))$ def f
$= H(x)$ def H
$= \Lambda$ IH

Hvis vi antar at $H(x) = \Lambda$, følger det at $H(x0) = \Lambda$ og $H(x1) = \Lambda$.

Vi har også vist at $H(\Lambda) = \Lambda$.

Ved strukturell induksjon følger det at $H(x) = \Lambda$ for alle $x \in M$.

def H

$$
\begin{aligned}
H(x1) &= f(g(x1)) && \text{def } g \\
&= f(g(x)) && \text{def } H \\
&= H(x) && \text{IH} \\
&= \Lambda
\end{aligned}
$$

25 Logisk resonnering [10 poeng] Høst 2018

Anta at formelen $\neg P \wedge (P \vee \neg Q)$ er sann. P=0 Q=0

(a) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til Q? (sann / usann / ubestemt)

Anta at formelen $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ er sann.

(b) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til R? (sann / usann / ubestemt)

Anta at formelen $\neg(P \vee Q) \vee \neg((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))$ er usann.

(c) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til P? (sann / usann / ubestemt)

(d) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til R? (sann / usann / ubestemt)

enten P eller Q må være sann → R må være sann

Anta at formlene $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \vee Qy))$ og $(Rab \wedge \neg Pa)$ er sanne.

Rab → (Pa ∨ Qb)

(e) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til Qb? (sann / usann / ubestemt)

(f) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til Pb? (sann / usann / ubestemt)

(g) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til $\neg Raa \vee Qa$? (sann / usann / ubestemt)

Raa → (Pa ∨ Qa)