Oppgaver til kapittel 1

1.1 La A stå for mengden $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, B stå for mengden $\{0,1,2,3,4\}$ og C stå for mengden $\{2,3,5,7\}$. Regn ut følgende mengder. Du trenger kun å gi det endelige svaret.

(a) $A \cup B$
(b) $A \cap B$
(c) $A \setminus B$
(d) $\emptyset \setminus (A \setminus B)$
(e) $(A \setminus B) \setminus C$
(f) $(B \cup C) \setminus A$
(g) $((A \cup B) \setminus A) \setminus B$
(h) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$

1.2 Finn tre ikke-tomme delmengder, A, B og C, av mengden $\{a, b, 2, 4\}$ slik at $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cup B = \{a, b\}$ og $(A \cup B) \cup C = \{a, b, 2, 4\}$.

1.3 La $A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \{2,2\}, \{2,1\}\}$ og $B = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$. Legg merke til forskjellene mellom $\{\ \}$ og $\langle\ \rangle$.

(a) Er det slik at $\{2\} \subseteq A$? Forklar.
(b) Er det slik at $\{2\} \in A$? Forklar.
(c) Regn ut $A \cap B$.

1.4 Anta at du har to ikke-tomme mengder, A og B, og at $A \subseteq B$. La C være en mengde.

(a) Må $(A \setminus C)$ være en delmengde av $(B \setminus C)$? Forklar.
(b) Må $(A \cap B)$ være en delmengde av $(A \cap B) \cap C$? Forklar.

Oppgaver til kapittel 2

2.1 La utsagnsvariabelen S stå for «jeg sier sannheten» og E stå for «jeg er under ed». Finn utsagnslogiske formler som representerer følgende utsagn, hvor du ikke bruker andre konnektiver enn $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$:

(a) *Jeg sier sannheten hvis jeg er under ed.*
(b) *Jeg sier sannheten bare hvis jeg er under ed.*
(c) *Jeg er under ed, men sier ikke sannheten.*
(d) *Jeg sier sannheten hvis og bare hvis jeg ikke er under ed.*

2.2 La utsagnsvariabelen M stå for «jeg bruker munnbind», U stå for «jeg er ute» og T stå for «jeg har det travelt». Finn utsagnene som representeres av følgende utsagnslogiske formler:

(a) $(U \rightarrow M)$ (b) $(\neg M \rightarrow \neg U)$ (c) $\neg(U \vee M)$ (d) $((U \wedge T) \rightarrow \neg M)$

2.3 Bruk samme utsagnsvariabler som i forrige oppgave, og finn utsagnslogiske formler som representerer følgende utsagn:

(a) *Jeg bruker munnbind, og jeg har det ikke travelt.*
(b) *Jeg bruker munnbind hvis jeg er ute.*
(c) *Det er ikke slik at jeg er ute og ikke bruker munnbind.*
(d) *Hvis jeg er ute og ikke bruker munnbind, har jeg det travelt.*

2.4 La F stå for utsagnet «min katt er stor og blid». For hvert av følgende utsagn, avgjør om utsagnet utgjør en tilstrekkelig betingelse for F, en nødvendig betingelse for F, begge deler eller ingen av delene. For (g) og (h), forklar kort hvorfor du mener det er slik.

(a) *Min katt er blid.*
(b) *Min katt er smart og fin.*
(c) *Min katt er blid, oransje og stor.*
(d) *Min katt er blid og oransje.*
(e) *Min katt er stor, men blid.*
(f) *Min katt er hverken stor eller blid.*
(g) *Min katt er glad og svær.*
(h) *Jeg eier et kjæledyr.*

Oppgaver til kapittel 3

3.1 Sett opp sannhetsverditabellene til følgende uttrykk:

(a) $(\neg\neg P \rightarrow P)$
(b) $\neg(P \rightarrow (Q \vee P))$
(c) $(P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R))$

Hint: Det er ikke tilstrekkelig å kun ha med sannhetsverdiene under hovedkonnektivet.

3.2 Se på disse seks formlene. Oppgi hvilke som er ekvivalente med hverandre. For to av formlene (du velger selv), forklar kort hvorfor de er ekvivalente. Hint: Det er tre par av formler.

(a) $(P \rightarrow (Q \wedge R))$
(b) $((\neg P \vee \neg Q) \vee R)$
(c) $(P \vee (Q \rightarrow R))$
(d) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$
(e) $((P \wedge Q) \rightarrow R)$
(f) $(\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R))$

3.3 Se på formelen $((\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R)$. Finn tre forskjellige formler som alle er ekvivalente med, men forskjellige fra, denne formelen.

3.4 Anta at en formel F har følgende sannhetsverditabell.

P	Q	R	F
1	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**

(a) Finn en formel som har samme sannhetsverdier som F og som kun bruker konnektivene $\rightarrow$ og $\vee$ (i tillegg til utsagnsvariablene P, Q og R og parenteser). Forklar kort hvorfor den har samme sannhetsverdier som F.
(b) Finn en formel som har samme sannhetsverdier som F og som kun bruker konnektivene $\wedge$ og $\neg$ (i tillegg til utsagnsvariablene P, Q og R og parenteser). Forklar kort hvorfor den har samme sannhetsverdier som F.

Oppgaver til kapittel 4

4.1 Vis at følgende par av formler *ikke* er ekvivalente og at én av formlene i paret er en logisk konsekvens av den andre. I denne oppgaven skal du ikke bruke sannhetsverditabeller.

(a) $(P \to Q)$ og $(Q \wedge P)$

(b) $(P \wedge Q)$ og $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

4.2 La A stå for en vilkårlig utsagnslogisk formel. Avgjør om påstandene nedenfor er sanne eller usanne. Gi en kort begrunnelse for hvert svar.

(a) Hvis A er oppfyllbar, er A falsifiserbar.
(b) Hvis A er oppfyllbar og falsifiserbar, er A hverken en tautologi eller kontradiksjon.
(c) Formelen A er en logisk konsekvens av A.
(d) Formelen A er en logisk konsekvens av enhver tautologi.
(e) Formelen A er en logisk konsekvens av enhver motsigelse.
(f) En mengde bestående kun av en tautologi og en motsigelse er uavhengig.

4.3 (a) Anta at vi har premissene $(A \vee B)$, $(A \to C)$ og $(C \wedge B)$, og konklusjonen A. Er dette et gyldig argument? Begrunn.
(b) Anta at vi har premissene $(A \wedge C)$ og $(C \to B)$, og konklusjonen $(A \wedge B)$. Er dette et gyldig argument? Begrunn.

4.4 For hver av formlene under, angi om formelen er en tautologi, en kontradiksjon, eller ingen av delene. Begrunn svaret med ord.

(a) $(P \wedge (Q \vee P))$
(b) $((A \to B) \vee (B \to A))$
(c) $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$
(d) $((A \wedge B) \wedge \neg(A \vee B))$

Oppgaver til kapittel 5

5.1 Er følgende påstander sanne eller usanne? Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel. Hvis påstanden er sann, gi et argument som beviser at den er sann. (Merk at her er F en *plassholder* for en utsagnslogisk formel og ikke en konkret utsagnslogisk formel.)

(a) Alle oddetall større enn 55 er primtall.
(b) Alle formler F slik at $\neg\mathsf{F}$ er en kontradiksjon, er gyldige.
(c) Alle tautologier har minst to konnektiver.
(d) Alle formler F som er slik at både F og $\neg\mathsf{F}$ er oppfyllbare, er kontradiksjoner.

5.2 Når vi tolker påstanden F *er sann*, må vi kjenne til konteksten for å gjøre det på riktig måte. Her er noen mulige presiseringer formulert som påstander om F. Finn ut hvilke som er logiske konsekvenser av hvilke. I tillegg, forklar hva som er forskjellen mellom (a) og (b). Tegn for eksempel opp (a), (b), (c) og (d) i en firkant og tegn $\Rightarrow$-piler som angir logisk konsekvens. For eksempel, hvis (a) er en logisk konsekvens av (b), skriv (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) Det finnes en valuasjon som gjør formelen F sann.
(b) Valuasjonen v gjør formelen F sann.
(c) Alle valuasjoner gjør formelen F sann.
(d) Det finnes ingen valuasjon som gjør formelen F usann.

5.3 Se på følgende resonnement, som har to premisser, (i) og (ii), og én konklusjon, (iii), og avgjør om det er et gyldig resonnement eller ikke. Hvis det er gyldig, forklar hvorfor; hvis ikke, gi et moteksempel som viser at det ikke er gyldig. Henvis til definisjonene når du forklarer.

Merk at F og G er *plassholdere* for utsagnslogiske formler; et moteksempel vil derfor blant annet bestå av konkrete formler for F og G som viser hvordan (i) og (ii) kan være sanne uten at (iii) også er sann. Her er F og G altså *ikke* utsagnslogiske variabler, men de kan være *hvilke som helst* utsagnslogiske formler, for eksempel $(\mathsf{P} \to \neg\mathsf{Q})$ og $(\mathsf{R} \wedge \mathsf{P})$.

(*i*) *Alle valuasjoner gjør formelen* $(\mathsf{F} \to \mathsf{G})$ *sann.*
(*ii*) *Alle valuasjoner gjør formelen* G *sann.*
(*iii*) *Da må alle valuasjoner gjøre* F *sann.*

5.4 Gi et motsigelsesbevis for at $(\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{P}))$ er en tautologi.

Oppgaver til kapittel 6

6.1 La A være mengden $\{1, 2, 3, a, b\}$, og la følgende være relasjoner på A. For hver relasjon, avgjør hvilke av egenskapene refleksiv, irrefleksiv, transitiv, symmetrisk og anti-symmetrisk den har.

(a) $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle a, 1\rangle\}$
(b) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
(c) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
(d) $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, b\rangle\}$

6.2 La $A = \{1, 3, 6, 7, 12, 15, 17\}$, og la R være en relasjon på A som er slik at $\langle x, y\rangle \in R$ når x/y er et naturlig tall større enn 1. Hvilke elementer er med i relasjonen R? Hvilke egenskaper har R? (Her betyr x/y tallet x *delt på* y. Se forrige oppgave for relevante egenskaper.)

6.3 La $A = \{1, 2, 3\}$. For hver av deloppgavene under, finn en relasjon på A som har de angitte egenskapene. Oppgi relasjonen som en mengde av tupler.

(a) refleksiv og symmetrisk
(b) symmetrisk, anti-symmetrisk og transitiv
(c) irrefleksiv, symmetrisk og transitiv
(d) ikke-refleksiv, symmetrisk og ikke-transitiv

6.4 La E være relasjonen på *mengder* av naturlige tall slik at $\langle A, B\rangle \in E$ når det er nøyaktig ett element i $A \setminus B$. En mengde A er altså relatert til en mengde B hvis mengdedifferansen mellom A og B inneholder nøyaktig ett element. For eksempel er mengden $\{1, 2\}$ relatert til $\{1\}$ fordi mengdedifferansen er $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$, som har nøyaktig ett element. Vi har også at $\{5\}$ er relatert til $\{3\}$, fordi $\{5\} \setminus \{3\} = \{5\}$, som har ett element. Derimot er $\{1, 2, 3\}$ ikke relatert til $\{2\}$, fordi $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$, som har to elementer. Husk at det er kun *mengder* som er relaterte til hverandre; hvis A er relatert til B, så er både A og B mengder av naturlige tall.

(a) Finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A er relatert til B, og finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A *ikke* er relatert til B. Eksemplene må være forskjellige fra eksemplene gitt i oppgaveteksten.

For hver av deloppgavene under, begrunn svaret ditt: Hvis ja, forklar hvorfor; hvis nei, forklar hvorfor ikke. Hint: Her må du bruke definisjonene av begrepene symmetrisk, transitiv og irrefleksiv.

(b) Er relasjonen E symmetrisk?
(c) Er relasjonen E transitiv?
(d) Er relasjonen E irrefleksiv?

Oppgaver til kapittel 7

7.1 La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv, surjektiv, begge deler eller ingen av delene.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}$

7.2 La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ og $C = \{a, b, c\}$. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være definert ved at $f = \{\langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \heartsuit\rangle, \langle 3, \heartsuit\rangle\}$ og $g = \{\langle \spadesuit, c\rangle, \langle \heartsuit, a\rangle, \langle \clubsuit, b\rangle\}$. Vi definerer $h : A \to C$ til å være sammensetningen av f og g, det vil si at $h(x) = g(f(x))$ for alle x.

(a) Definer h som en mengde av tupler.
(b) Hva er bildemengden til h, altså $h[A]$?

7.3 La $f : A \to A$ være definert ved $f(x) = \mathrm{id}_A(x)$. Husk at id_A er identitetsfunksjonen på A; det vil si at $\mathrm{id}_A(x) = x$ for alle $x \in A$. Fordi f er en funksjon, er den også en relasjon, og vi kan undersøke hvilke egenskaper den har.

(a) Er f en *operasjon*? Forklar.
(b) Er f en symmetrisk relasjon? Forklar.
(c) Er f en partiell ordning på A? Vis hvorfor eller hvorfor ikke.

7.4 Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av alle utsagnslogiske formler (se side 22). Vi definerer funksjonen $Z : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ved

$$Z(F, G) = (F \wedge G).$$

Merk at vi ser på $(F \wedge G)$ rent *syntaktisk*, og vi ser altså ikke på tolkningen av formelen. For eksempel er $(P \wedge Q)$ *ikke* den samme formelen som $(Q \wedge P)$, selv om de er logisk ekvivalente. Det står noen flere hint etter deloppgavene.

(a) Hva er $Z((\neg P \wedge \neg Q), \neg\neg R)$ og $Z((R \vee \neg P), (P \wedge (P \wedge R)))$?
(b) Er Z injektiv? Forklar.
(c) Hva er bildemengden til Z?
(d) Er Z surjektiv? Forklar.

Hint: Vi lar altså F og G kunne være *hvilke som helst utsagnslogiske formler*. For eksempel kan vi ha at $F = \neg(P \wedge Q)$ og $G = (P \to Q)$. Da får vi:

$$Z(\neg(P \wedge Q), (P \to Q)) = (\neg(P \wedge Q) \wedge (P \to Q))$$

Vi kan også ha:

$$Z((P \vee Q), \neg Q) = ((P \vee Q) \wedge \neg Q) \quad \text{og} \quad Z(\neg\neg\neg M, (P \wedge P)) = (\neg\neg\neg M \wedge (P \wedge P))$$

Vi ser altså bare på symbolene i formelen (syntaksen) og bryr oss *ikke* om sannhetsverdien og tolkningen (semantikken).

Oppgaver til kapittel 8

8.1 Regn ut følgende mengder.

(a) $\mathcal{P}(\{2, a\})$ (b) $\{\emptyset, 2\} \cup \mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, 4\})$ (d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{57\}))$

8.2 I denne oppgaven skal vi bevise en av De Morgans lover, nemlig at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B. Det gjør vi ved å først vise at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, så vise $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vi skal ikke bruke Venn-diagrammer eller andre illustrasjoner i dette beviset, men derimot ord, symboler og setninger. Det holder med korte forklaringer, så lenge man får med essensen i beviset.

(a) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A \cup B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A \cup B}$.
(c) Bruk resultatene i (a) og (b) til å konkludere med at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B.

8.3 La $\mathcal{H}$ være mengden av alle positive halv-tall. Vi har altså at

$$\mathcal{H} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}.$$

Vis at $\mathcal{H}$ har samme kardinalitet som de naturlig tallene, altså at $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$.

8.4 Husk at en multimengde $[a_0, a_1, ..., a_n]$ er en samling objekter der rekkefølgen, men ikke antall forekomster av hvert element, ignoreres. Vi har altså at $[1, 2, 2] \neq [1, 2]$. Vi sier at **kardinaliteten** til en multimengde er antall elementer i den. Hver multimengde M gir opphav til en mengde $F(M)$ av alle tupler på formen $\langle x, n \rangle$, der x angir et element i M, og n angir hvor mange ganger x forekommer i M. For eksempel har vi at $F([a, a, b, c, c, c]) = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$. Generelt har vi at dersom et element x forekommer fem ganger i multimengden M, vil tuppelet $\langle x, 5 \rangle$ være med i $F(M)$.

(a) Hva blir $F([0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 5])$?
(b) La M være en multimengde. Hvilken mengde har størst kardinalitet av M og $F(M)$? Gi en kort begrunnelse.
(c) Er $F(M)$ en funksjon? Forklar. Vi lurer altså *ikke* på om F er en funksjon, men på om $F(M)$ er en funksjon, altså det elementet som funksjonen F returnerer for argumentet M.

Oppgaver til kapittel 9

9.1 La $U = \{a, b, c, d\}$, og la R være relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på U.

(a) Hva er den refleksive tillukningen av R?
(b) Hva er den symmetriske og transitive tillukningen av R?

9.2 La $A = \{1, 2, 3\}$. Forklar hvorfor man ikke kan ta den *irrefleksive* tillukningen av relasjonen $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ på A.

9.3 For hver av følgende induktive definisjoner, begynn med basismengden og konstruer de første ti elementene i mengden.

(a) *Basismengde:* $\{0\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $x - 1$ med.
(b) *Basismengde:* $\{3\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $3 \cdot x$ og $(3 \cdot x) + 1$ med.

Her er $+$, $-$ og $\cdot$ de vanlige aritmetiske operasjonene på tall: addisjon, subtraksjon og multiplikasjon.

9.4 Finn induktive definisjoner for mengdene nedenfor. For eksempel kan mengden $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ defineres induktivt som den minste mengden A som er slik at $0 \in A$ og hvis $x \in A$, så $x + 2 \in A$. Definer mengden slik at basismengden består av ett element for (a) og to elementer for (b).

(a) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
(b) $\{a, b, ab, bb, abb, bbb, abbb, bbbb, \ldots\}$

Oppgaver til kapittel 10

10.1 Gi en rekursiv definisjon av hver av følgende funksjoner på $\mathbb{N}$. Regn også ut de åtte første verdiene for hver funksjon. For eksempel kan funksjonen $f(n) = 2 \cdot n$ defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 2$.

(a) $f(n) = 3 \cdot n + 1$ (b) $f(n) = n^2$

10.2 La alfabetet $A = \{\mathtt{t}, \mathtt{a}, \mathtt{o}\}$. La funksjonen $\mathcal{T}$ fra A^* til heltallene være definert rekursivt ved:

$$\mathcal{T}(\Lambda) = 0$$

$$\mathcal{T}(s\mathtt{t}) = \mathcal{T}(s) + 1, \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{a}) = \mathcal{T}(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{o}) = \mathcal{T}(s) - 1$$

der $s \in A^*$.

(a) Regn ut $\mathcal{T}(\mathtt{t})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tatt})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tao})$ og $\mathcal{T}(\mathtt{ottato})$.
(b) Forklar kort med egne ord hva $\mathcal{T}$ gjør.

10.3 Vi definerer funksjonen b på mengden av bitstrenger (slik denne mengden er definert i Logiske metoder) slik at den bytter enhver forekomst av $\mathtt{0}$ med $\mathtt{1}$ og vice versa. For eksempel har vi at $b(\mathtt{0}) = \mathtt{1}$, $b(\mathtt{110}) = \mathtt{001}$ og $b(\mathtt{1011100}) = \mathtt{0100011}$. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen b.

10.4 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathcal{W}$ fra utsagnslogiske formler til naturlige tall, slik at $\mathcal{W}$ teller antall forekomster av konnektivet $\wedge$. Her er noen eksempler:

$$\mathcal{W}\big((P \wedge Q)\big) = 1 \qquad \mathcal{W}\big(((P \to Q) \vee R)\big) = 0 \qquad \mathcal{W}\big((P \wedge (Q \wedge P))\big) = 2$$

Oppgaver til kapittel 11

11.1 La f være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall n. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis **basissteget**, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall n, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Bruk **induksjonshypotesen** til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkluder og si hva du har bevist.

11.2 I denne og neste oppgave skal bruke matematisk induksjon til å vise at påstanden

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$$

er sann for alle naturlige tall.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

11.3 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

11.4 Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? Tips: Dette har mest har å gjøre med *formen* på argumentet.

*Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million. Basissteget går slik: Tallet 0 er klart **mye mindre** enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for n, det vil si at n er **mye mindre** enn én million. Dette er induksjonshypotesen. Vi skal vise at påstanden også holder for $n + 1$. Siden n er **mye mindre** enn én million, må også $n + 1$ være det, fordi $n + 1$ bare er bitte litt større enn n. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million.*

Oppgaver til kapittel 12

12.1 La S være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.2 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

12.3 La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg\textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \wedge G)) &= (\textsc{flip}(G) \wedge \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \vee G)) &= (\textsc{flip}(G) \vee \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på F og G.)

I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er *ekvivalent* med F, for alle utsagnslogiske formler F. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.4 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

Oppgaver til kapittel 13

13.1 La en signatur være $\langle a, b ; f, g ; P, R, Q \rangle$, der ariteten til f og P er én, ariteten til g og R er to, og ariteten til Q er null. Avgjør om følgende uttrykk er førsteordens *termer* eller ikke, ved å følge definisjonen av termer til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Gi en kort begrunnelse for hvert svar.

(a) $R(a, h(a))$ (b) $P(x)$ (c) (a) (d) $f(a, g(a, b))$

13.2 La signaturen være den samme som i forrige oppgave. Avgjør om følgende utrykk er førsteordens *formler* eller ikke, ved å følge definisjonen av formler til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Gi en kort begrunnelse for hvert svar.

(a) $\forall x \exists y$ (b) $g(x, a)$ (c) $(P(a))$ (d) $(Q \wedge P(z))$

13.3 Formlene under har ingen parenteser, men på grunn av presedensreglene kan vi tolke dem presist. Sett alle parenteser og kommaer på rett plass slik at formlene er korrekte. Alle formlene skal være i tråd med den induktivt definerte mengden av førsteordens formler. Ingenting annet skal endres, og betydningen av formelene skal ikke forandres.

(a) $Rxy \rightarrow Pa \wedge \neg \forall x Px$ (b) $\exists x \forall y \neg Px \vee Rxy$

13.4 Vi har lov til å droppe parenteser når vi skriver termer, men det må i så fall være helt entydig hva termene betyr. For eksempel skriver vi ofte hha i stedet for $h(h(a))$. Det er nokså uproblematisk, særlig om vi på forhånd vet hva ariteten til alle symbolene er. Men, se på følgende term med fire symboler. Den kan tolkes på tre forskjellige måter, avhengig av *ariteten* til de ulike symbolene. Vi antar at vi bruker prefiksnotasjon her. Forklar og finn de tre måtene å tolke termen på.

$$free$$

Oppgaver til kapittel 14

14.1 Anta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{c}$ er konstantsymboler som tolkes som Arne, Bjarne og Carl. Anta vi har relasjonssymbolene P, U, S og F der Px tolkes som *x er populær*, Ux tolkes som *x er usikker*, Sxy tolkes som *x er sjalu på y* og Fxy tolkes som *x er forelsket i y*. Finn førsteordens formler som representerer følgende utsagn:

(a) Bjarne er usikker.
(b) Carl er sjalu på noen.
(c) Carl er forelsket i Arne, men ikke i Bjarne.
(d) Alle er forelsket i noen.
(e) Arne er sjalu på noen som både er usikker og populær.
(f) Ingen er forelsket i Carl.
(g) Arne er sjalu på alle, men Bjarne er ikke det.
(h) De som er forelsket i seg selv er populære, men usikre.

14.2 Anta at konstantsymbolene $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{c}$ tolkes som Astrid, Bodil og Camilla. Anta at K, O, S og F er relasjonssymboler slik at Kx tolkes som x *har et stort kontor*, Ox tolkes som x *jobber overtid*, Sxy tolkes som x *er sjefen til* y og Fxy tolkes som x *er flinkere enn* y. Finn *gode* og *naturlige* norske setninger for følgende førsteordens formler.

(a) $(Kb \wedge \neg O\mathfrak{a})$
(b) $\forall x Ox$
(c) $\exists x(Ox \wedge Sxc)$
(d) $\forall x(Fbx \to \neg Kx)$
(e) $\forall x \exists y Fyx$
(f) $(\forall x Scx \wedge \exists y Ky)$
(g) $\exists x \forall y(Oy \to Fxy)$
(h) $\forall x \forall y(Sxy \to \exists z Szx)$

14.3 Avgjør om følgende formler er lukkede eller ikke. Hvis de ikke er det, oppgi de frie variablene. Kun $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ er konstantsymboler.

(a) $\forall x(Px \wedge \neg Px)$
(b) $\forall x P\mathfrak{a}$
(c) $\exists x \exists y Px \vee Py$
(d) $\forall x \exists y(Rxy \to \neg \exists z Ryb)$
(e) $\forall x(Py \wedge \neg Px)$
(f) $(\forall x Px \wedge Qx)$
(g) $P\mathfrak{a} \to Px$
(h) $\forall x \forall y \forall x(Rxy \to Ryz)$

14.4 La Fx bety at «x er en forsker». Uttrykk følgende utsagn ved hjelp av førsteordens formler, hvor vi kun har lov til å bruke F, og eventuelt $=$ eller $\neq$, som relasjonssymboler.

(a) Det finnes to personer som er forskere.
(b) Det finnes nøyaktig én forsker.

Oppgaver til kapittel 15

15.1 La et førsteordens språk med signaturen $\langle a, b ; f ; P, R \rangle$ være gitt, der f og P har aritet én og R har aritet to. La $\mathcal{M}$ være en modell for dette språket med domene $\{1, 2\}$ der vi tolker a som 1, b som 2, f som $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, P som $\{1\}$ og R som $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Avgjør om modellen gjør følgende formler sanne eller ikke.

(a) $(P(a) \wedge R(f(a), b))$
(b) $\exists x(\neg P(x) \wedge R(a, x))$
(c) $\forall x R(x, f(a))$
(d) $\exists x \forall y R(x, y)$

15.2 For hver formel nedenfor, avgjør hvilke av egenskapene *gyldig*, *oppfyllbar*, *falsifiserbar* og *kontradiktorisk* formelen har. Du trenger ikke å begrunne svaret. Du kan anta at signaturen er $\langle a ; ; P, Q, R \rangle$, hvor P og Q har aritet én og R har aritet to.

(a) $(\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \exists x \neg(Px \vee Qx))$
(b) $\exists x(Px \vee Rxa)$
(c) $(\forall x Rxa \wedge \exists x \neg Rxa)$
(d) $(\neg \exists x Px \rightarrow \forall x Px)$

15.3 Gitt domenet $\{1, 2, 3\}$, spesifiser en tolkning av relasjonssymbolene P og Q som gjør følgende formler sanne samtidig, det vil si spesifiser nøyaktig én modell som gjør alle fire formlene sanne.

(i) $\forall x \exists y(Pxy \wedge Qxy)$
(ii) $\neg \exists y \forall x Qxy$
(iii) $\forall x \forall y(Pxy \rightarrow \neg Pyx)$
(iv) $(\forall x Qxx \wedge \neg \forall x \forall y Qxy)$

15.4 Bevis at følgende formel er gyldig; det vil si, vis at enhver modell gjør denne formelen sann:

$$(\forall x(Rxa \wedge Rax) \rightarrow \exists y Ryb)$$

Oppgaver til kapittel 16

16.1 La F være formelen $(\exists x \mathsf{P}x \wedge \forall x \mathsf{R}xa)$. For hver av formlene nedenfor, avgjør om formelen er en *logisk konsekvens* av formelen F eller ikke.

(a) $\exists x \mathsf{R}xx$
(b) $(\mathsf{P}b \vee \exists x \mathsf{R}xb)$
(c) $(\mathsf{P}a \rightarrow \mathsf{P}a)$
(d) $(\neg \forall x \mathsf{P}x \wedge \exists x \mathsf{R}ax)$

16.2 La F være formelen $(\mathsf{P}a \vee \neg \exists x \mathsf{R}ax)$. For hver av formlene nedenfor, avgjør om F er en *logisk konsekvens* av formelen eller ikke.

(a) $\forall x \mathsf{P}x$
(b) $\neg \forall x \mathsf{R}ax$
(c) $(\exists x \neg \mathsf{R}ax \wedge \exists x \mathsf{P}x)$
(d) $(\mathsf{P}a \rightarrow \mathsf{P}a)$

16.3 For hver av formlene nedenfor, finn en tolkning av R som gjør formelen *usann* i en modell med domene $\{1, 2, 3\}$.

(a) $(\exists x \mathsf{R}xx \rightarrow \forall x \mathsf{R}xx)$
(b) $(\exists x \exists y \mathsf{R}xy \rightarrow \exists x \mathsf{R}xx)$
(c) $(\forall x \mathsf{R}xx \rightarrow \forall x \forall y \mathsf{R}xy)$
(d) $(\forall x \exists y \mathsf{R}xy \rightarrow \forall x \mathsf{R}xx)$

16.4 Skriv følgende formler på preneks normalform.

(a) $\forall x(\mathsf{F}xb \vee \forall y \mathsf{P}y) \rightarrow \exists z \mathsf{K}az$
(b) $(\exists x \mathsf{R}xa \wedge (\mathsf{P}b \rightarrow \forall x \mathsf{R}bx))$

Oppgaver til kapittel 17

17.1 La M være mengden $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. For hver av mengdene i (a) til (e), avgjør om mengden er en partisjon av M eller ikke. Dersom mengden ikke er en partisjon av M, forklar kort hvorfor ikke.

(a) $\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{0, 1\}\}$
(b) $\{\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}\}$
(c) $\{\{0, 1, 2\}, \{4, 3\}, \emptyset\}$
(d) $\{\{4, 3\}, \{2, 1\}, \{0, 3\}\}$
(e) (Bonus) Er noen av partisjonene i (a) til (d) forfininger av noen andre? Hvis ja, hvilke partisjoner er det? Hvis nei, forklar kort hvorfor ikke.

17.2 La $\sim$ være relasjonen på heltallene $\mathbb{Z}$ som er slik at $a \sim b$ holder dersom a og b har samme fortegn. Det vil si at $a \sim b$ er sant dersom både a og b er positive ($a \geqslant 0$ *og* $b \geqslant 0$), eller både a og b er negative ($a < 0$ *og* $b < 0$). Vi har for eksempel at $-2 \sim -3$ er sant og at $2 \sim -3$ er usant.

(a) Vis at relasjonen $\sim$ er en ekvivalensrelasjon, det vil si at relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) Hvor mange ekvivalensklasser har heltallene $\mathbb{Z}$ under relasjonen $\sim$? Hvordan ser disse ekvivalensklassene ut?

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\sim$ ved å skrive `\sim`.)

17.3 La M være mengden $\{a, b, c, d\}$.

(a) Hvor mange partisjoner P av M finnes det slik at $|P| = 3$? Det vil si, hvor mange partisjoner av M har nøyaktig tre elementer? Hint: Lag en liste over alle partisjonene.
(b) La $\gtrless$ være relasjonen på partisjoner av M slik at $P \gtrless Q$ dersom $|P| = |Q|$. Det vil si, dersom P og Q er partisjoner av M slik at P og Q har samme kardinalitet, så vil $P \gtrless Q$. Bevis at $\gtrless$ er en ekvivalensrelasjon.

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\gtrless$ ved å skrive `\gtrless`.)

17.4 La M og $\gtrless$ være definert som i forrige oppgave.

(a) Hva er ekvivalensklassen til $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$?
(b) Hvor mange forskjellige ekvivalensklasser finnes det for ekvivalensrelasjonen $\gtrless$? Hva er det som skiller én ekvivalensklasse fra en annen?

Oppgaver til kapittel 18

18.1 En gartner skal plante åtte blomster i rad etter hverandre i et blomsterbed.

(a) Dersom vi anser alle de åtte blomstene for å være forskjellige, på hvor mange forskjellige måter kan gartneren plassere dem?
(b) Blant de åtte blomstene er det to roser, tre tulipaner og tre rhododendroner. Dersom vi *ikke* anser alle blomstene som forskjellige, men identifiserer blomster av samme type (slik at vi for eksempel ikke ser forskjell på to rhododendroner), på hvor mange mulig forskjellige måter kan gartneren plassere dem nå?
(c) Samtidig som gartneren prøver å vurdere alle rekkefølgene for å finne den fineste, tenker han over det morsomme navnet `rhododendron`. Dersom vi bruker bokstavene i strengen `rhododendron` og stokker dem om, hvor mange forskjellige strenger kan vi lage?

18.2 En *bitstreng* er en ikke-tom streng over alfabetet $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Hvor mange forskjellige bitstrenger finnes det av lengde ti?
(b) hvor mange forskjellige bitstenger finnes det med lengde tjue?
(c) Hvor mange bitstrenger av lengde ti finnes det med *nøyaktig* tre forekomster av 0?
(d) Hvor mange bitstrenger av lengde ti finnes det med *minst* tre forekomster av 0?

18.3 Vi definerer en *kvantestreng* som ikke-tom streng over alfabetet $\Sigma = \{0, 1, \phi\}$

(a) Hvor mange kvantestrenger finnes det med lengde ti?
(b) Hvor mange kvantestrenger finnes det med lengde tjue?
(c) Hvor mange kvantestrenger av lengde ti finnes det med *nøyaktig* tre forekomster av 0?
(d) Hvor mange kvantestrenger finnes det med nøyaktig to forekomster av 0, tre forekomster av 1 og fem forekomster av ϕ?

18.4 (a) La K være en mengde med tre elementer. Hvor mange partisjoner P av K finnes det slik at $|P| = 2$, det vil si med nøyaktig to elementer?
(b) La L være en mengde med fire elementer. Hvor mange partisjoner P av L finnes det, slik at $|P| = 3$, det vil si med nøyaktig tre elementer?
(c) La M være en mengde med m elementer. Hvor mange partisjoner P av M finnes det, slik at $|P| = m - 1$, det vil si med nøyaktig $m - 1$ elementer?

Oppgaver til kapittel 19

19.1 (a) Åge Rant har ni sjongleringsballer som alle har forskjellige farger. Han har fire forskjellige skuffer å legge ballene i. På hvor mange forskjellige måter kan han legge ballene i skuffene? Vi er her kun opptatt av hvilke baller som havner i hvilke skuffer.

(b) Han velger å kjøpe ni nye sjongleringsballer som alle er hvite, og det er umulig å se forskjell på dem. På hvor mange forskjellige måter kan han legge de nye ballene i de fire skuffene sine? Vi er her altså kun opptatt av hvor mange baller som havner i hver skuff.

19.2 La T være mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Hvor mange delmengder av T med nøyaktig ett element finnes det? Hvor mange delmengder av T med nøyaktig to elementer finnes det?

(b) Hvor mange delmengder av T med nøyaktig tre elementer finnes det? Hvor mange delmengder av T med nøyaktig fire elementer finnes det? Hvor mange delmengder av T finnes det totalt?

(c) Forklar hvorfor vi generelt har at

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Hint: Forsøk først å se hvorfor det er slik når $n = 4$ eller $n = 3$.

19.3 Anta mengden A har n elementer, og at $|A| = |B|$. Hvor mange funksjoner $f : A \to B$ finnes det slik at f er bijektiv? Begrunn svaret.

19.4 Tulleland har et romskip som skal reise til Mars med 101 passasjerer. Disse passasjerene skal fordeles på romskipets tre unike kabiner. Hver kabin må ha mellom én og femti passasjerer.

(a) (Oppvarming) Hvor mange fordelinger finnes med én passasjer i den første kabinen? Hvor mange fordelinger finnes med to passasjerer i den første kabinen?

(b) Hvor mange fordelinger finnes det totalt? Det vil si, på hvor mange måter kan passasjerene fordeles i de tre kabinene?

(c) Forklar kort hvordan du regnet ut svaret.

Kommentarer: Vi ser ikke forskjell på passasjerene; vi er kun interessert i antallet passasjerer i hver av de tre kabinene. Vi ser derimot forskjell på kabinene. Det kan for eksempel være femti passasjerer i den første kabinen, førti i den andre, og elleve i den tredje. En annen måte kan være at elleve passasjerer er i den første kabinen, førti i den andre, og femti i den tredje. Husk også at hver kabin må ha minst én, men maksimalt femti, passasjerer.

Oppgaver til kapittel 20

20.1 (a) Angi inversen til relasjonen $\{ \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle \}$ på naturlige tall.
(b) Angi inversen til barnebarnrelasjonen på mengden av alle mennesker.
(c) Angi inversen til relasjonen som er slik at x er relatert til y hvis x ser på y, der x og y er mennesker.
(d) La $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være konstantfunksjonen som alltid gir 4, det vil si at $k(x) = 4$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Forklar hvorfor k ikke har en invers funksjon.

20.2 For hver av følgende grupper, angi identitetselementet og hva som er inversen til et element x.

(a) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
(b) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ den vanlige multiplikasjonsoperasjonen.)

Hvorfor er ikke følgende par av mengder og operasjoner grupper?

(c) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
(d) $\langle \{s \mid s \text{ er en streng over alfabetet } \{0, 1\}\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ konkateneringsoperasjonen, det vil si $s \cdot t = st$.)

20.3 (a) For $x \in \mathbb{R}$, la $\lfloor x \rfloor$ være lik x rundet av nedover til nærmeste heltall. For eksempel vil $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Vis at denne funksjonen er idempotent.
(b) Vis at mengdedifferanseoperasjonen ikke er assosiativ.
(c) Kan vi ha en gruppe $\langle G, \bullet \rangle$ slik at G har null elementer? Hvorfor / hvorfor ikke? Forklar.
(d) Kan vi ha en gruppe $\langle G, \bullet \rangle$ slik at G har ett element? Hvorfor / hvorfor ikke? Forklar.

20.4 La $f : A \to B$ og $g : B \to C$. Vi har at sammensetningen av g og f er gitt ved ved $h : A \to C$ og $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

(a) Anta f og g er injektive. Bevis at h også må være injektiv.
(b) Anta f og g er surjektive. Bevis at h også må være surjektiv.
(c) Anta f og g er både injektive og surjektive. Vis at h har en inversfunksjon.

Oppgaver til kapittel 21

21.1 Anta at vi har en enkel graf G med følgende noder og kanter:

$$V = \{a, b, c, d, e\} \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{e, c\}, \{e, b\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$$

(a) Tegn denne grafen.
(b) Er dette en komplett graf? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hva mangler?
(c) Hva er nodene og kantene til $\overline{G}$, komplementet til G?

21.2 (a) Hva er summen av gradene i en graf med fem noder og tre kanter?
(b) Hva er summen av gradene i en graf med tre noder og fem kanter?
(c) Hva er summen av gradene i K_4, den komplette grafen med fire noder?
(d) Hva er summen av gradene til $\overline{K_5}$, komplementet til K_5?

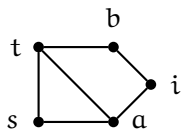
21.3 (a) Finn en *rettet* graf med nøyaktig fire noder og tre kanter, og definer denne presist som en mengde med noder og en mengde med kanter. Tegn deretter grafen.
(b) Anta at en enkel, rettet graf har nodene $\{a, b, c\}$. Hvor mange forskjellige rettede grafer kan denne gi opphav til? Du trenger kun å oppgi tallet. (Vi tillater altså ikke løkker eller parallelle kanter, men to noder kan ha to kanter mellom seg dersom de har forskjellig retning.)
(c) Hva er svaret på (b) dersom vi ikke tillater at to noder har to kanter mellom seg?
(d) Hva er svaret på (b) for en graf med n noder (hvor $n \geqslant 2$)?

21.4 La G være grafen med nodene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og kantene

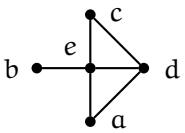
$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

For hver av grafene nedenfor, avgjør om denne grafen er isomorf med G. Hvis den er det, gi en isomorfi fra G til grafen. Hvis ikke, forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

(a) Grafen H_1 med noder $\{a, b, c, d\}$ og kanter $\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, c\}\}$.
(b) Grafen H_2 med noder $\{e, f, s, o, i\}$ og kanter $\{\{o, s\}, \{f, s\}, \{i, f\}, \{e, i\}, \{o, e\}, \{o, f\}\}$.
(c) Grafen H_3:

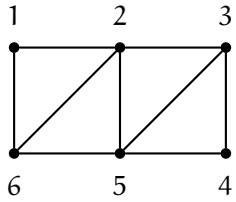


(d) Grafen H_4:



Oppgaver til kapittel 22

22.1 Se på følgende graf.

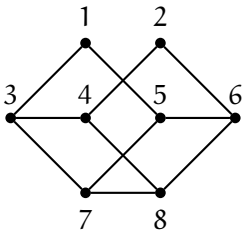


(a) Har denne grafen en *eulerkrets*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(b) Har denne en *eulervei*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(c) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

22.2 Se på følgende graf.



(a) Har denne grafen en *eulerkrets*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(b) Har denne en *eulervei*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(c) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

22.3 La $u \leftrightsquigarrow v$ bety at det finnes en *sti* fra u til v, for en gitt urettet graf. Bevis at $\leftrightsquigarrow$ er en *ekvivalensrelasjon*, det vil si at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Hvilke ekvivalensklasser gir denne relasjonen gir opphav til? Det vil si, hva er det som skiller en ekvivalensklasse fra en annen?

Tips: Legg merke til at det står *sti* og ikke *vandring* her. Dersom du bruker LaTeX, får du $\leftrightsquigarrow$ ved å skrive `\leftrightsquigarrow`.

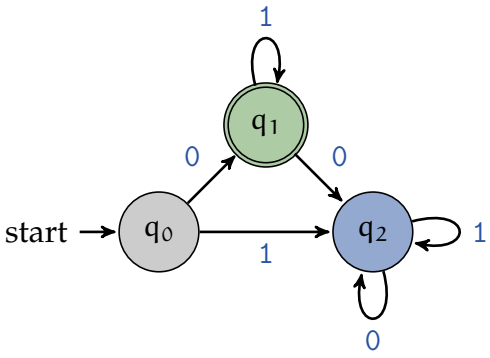
22.4 (a) Anta at T_1 og T_2 er trær. La N_1 og N_2 stå for nodene og E_1 og E_2 stå for kantene i disse trærne. Anta at N_1 og N_2 ikke har noen noder til felles og at E_1 og E_2 ikke har noen kanter til felles. La $n_1 \in N_1$ og $n_2 \in N_2$. La T være grafen som består av nodene $N_1 \cup N_2$ og kantene $E_1 \cup E_2$ i tillegg til kanten $\{n_1, n_2\}$. Vis at T er et tre.

(b) Bevis at alle komplette grafer med minst tre noder har en hamiltonsykel.

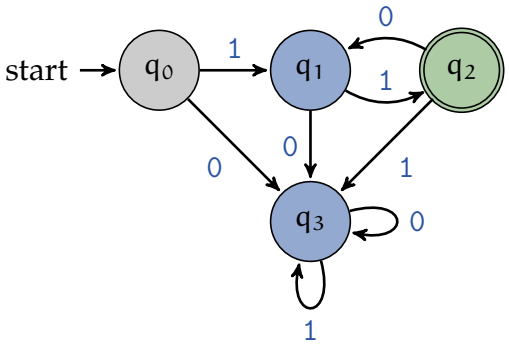
Oppgaver til kapittel 23

23.1 For hver av de endelige tilstandsmaskinene nedenfor, finn regulære uttrykk som beskriver det samme som tilstandsmaskinene. Legg merke til at (a), (b) og (c) er deterministiske og at (d) er ikke-deterministisk.

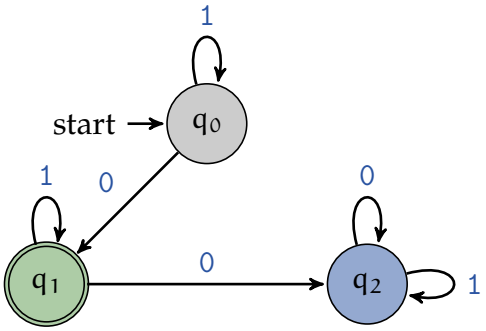
(a)



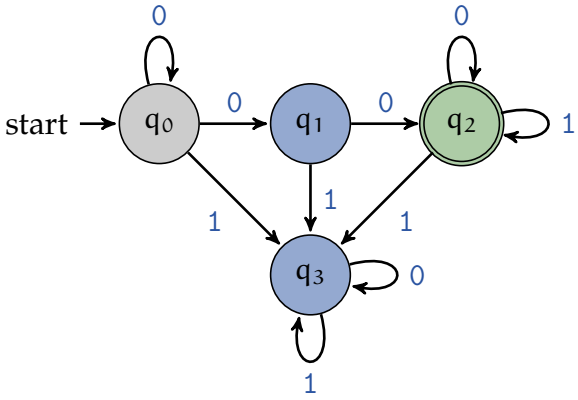
(b)



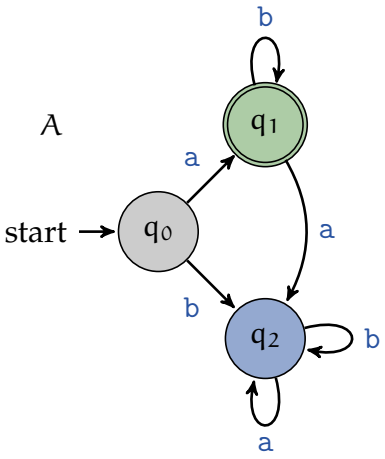
(c)

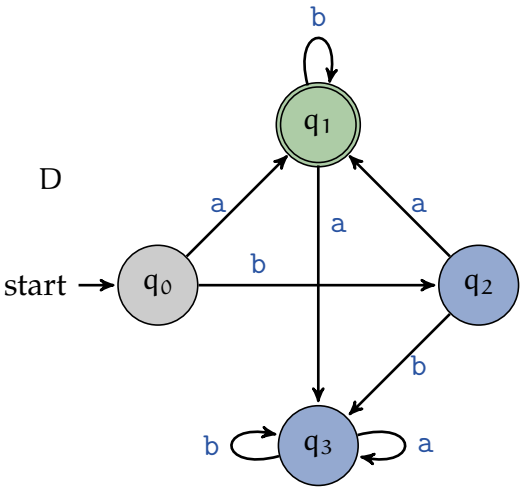


(d)



23.2 Følgende endelige tilstandmaskiner beskriver to regulære språk, A og D, over alfabetet {a, b}.





I tillegg lar vi B være språket som beskrives av det regulære uttrykket a(b|a)* og C være språket {a, ab, abb, abbb, abbbb, ...}. Finn ut hvilke av språkene A, B, C og D som er delmengder av hverandre og ikke.

23.3 Se på følgende formelle grammatikk over alfabetet {a, b}. Startsymbolet er som vanlig S.

$$S \to aSa \mid bSb \mid T \mid \Lambda$$
$$T \to a \mid b$$

(a) Gi en utledning av strengen abbba. Vis hvert ledd i utledningen.

(b) Finn en enkel beskrivelse (ved hjelp av naturlig språk) av språket som denne grammatikken definerer.

23.4 For hver av de to følgende formelle grammatikkene, finn et regulært uttrykk som beskriver det samme språket som den formelle grammatikken. Alfabetet er her {a, b, c, d, e}. Startsymbolet er som vanlig S.

(a)

$$S \to aaT$$
$$T \to U \mid bT$$
$$U \to a \mid c$$

(b)

$$S \to cXY$$
$$X \to dX \mid d$$
$$Y \to bY \mid \Lambda$$

For hvert av følgende regulære uttrykke, finn en *regulær* grammatikk som beskriver det samme språket som uttrykket. Bruk startsymbolet S.

(c) (e|c|e)(a|b)*

(d) ((a|b)*)*c

Oppgaver til kapittel 24

24.1 (a) Gi et bevis for formelen $P \to (\neg Q \to (\neg Q \wedge P))$ i naturlig deduksjon.

(b) Gi en utledning av formelen $\neg\neg P \wedge \neg Q$ i naturlig deduksjon slik at $\neg Q \wedge P$ er den eneste åpne antakelsen i utledningen.

24.2 (a) Gi en utledning av formelen $\neg(P \wedge (Q \to R))$ i naturlig deduksjon slik at $\neg P$ er den eneste åpne antakelsen.

(b) Bruk naturlig deduksjon til å vise at formelen $P \to Q$ er en logisk konsekvens av formelen $\neg P \vee (P \to Q)$.

24.3 (a) Bruk naturlig deduksjon til å vise at formelen $(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg\neg Q)$ er en tautologi.

(b) Finn en utledning av en formel i naturlig deduksjon som har følgende egenskaper:

- Utledningen har nøyaktig én anvendelse av regelen $\wedge$E.
- Utledningen har nøyaktig én anvendelse av regelen $\wedge$I.
- Utledningen har nøyaktig én anvendelse av regelen $\to$I.
- Utledningen har nøyaktig én åpen antakelse.
- Utledningen har nøyaktig én lukket antakelse.

Det vil si, du skal finne én utledning som har alle disse egenskapene samtidig. Det er ikke nødvendigvis samme formel som i (a). Hint: Utledning trenger ikke å være så stor.

24.4 (a) Gi en utledning av formelen $P \to (Q \vee R)$ i naturlig deduksjon slik at $(P \to Q) \vee (P \to R)$ er den eneste åpne antakelsen.

(b) Gi et bevis for formelen $\neg\neg\neg(P \wedge Q) \to \neg(P \wedge Q)$ i naturlig deduksjon.