Oppgaver til kapittel 5

5.1 Er følgende påstander sanne eller usanne? Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel. Hvis påstanden er sann, gi et argument som beviser at den er sann. (Merk at her er F en *plassholder* for en utsagnslogisk formel og ikke en konkret utsagnslogisk formel.)

(a) Alle oddetall større enn 55 er primtall.
(b) Alle formler F slik at $\neg\mathsf{F}$ er en kontradiksjon, er gyldige.
(c) Alle tautologier har minst to konnektiver.
(d) Alle formler F som er slik at både F og $\neg\mathsf{F}$ er oppfyllbare, er kontradiksjoner.

5.2 Når vi tolker påstanden F *er sann*, må vi kjenne til konteksten for å gjøre det på riktig måte. Her er noen mulige presiseringer formulert som påstander om F. Finn ut hvilke som er logiske konsekvenser av hvilke. I tillegg, forklar hva som er forskjellen mellom (a) og (b). Tegn for eksempel opp (a), (b), (c) og (d) i en firkant og tegn $\Rightarrow$-piler som angir logisk konsekvens. For eksempel, hvis (a) er en logisk konsekvens av (b), skriv (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) Det finnes en valuasjon som gjør formelen F sann.
(b) Valuasjonen v gjør formelen F sann.
(c) Alle valuasjoner gjør formelen F sann.
(d) Det finnes ingen valuasjon som gjør formelen F usann.

5.3 Se på følgende resonnement, som har to premisser, (i) og (ii), og én konklusjon, (iii), og avgjør om det er et gyldig resonnement eller ikke. Hvis det er gyldig, forklar hvorfor; hvis ikke, gi et moteksempel som viser at det ikke er gyldig. Henvis til definisjonene når du forklarer.

Merk at F og G er *plassholdere* for utsagnslogiske formler; et moteksempel vil derfor blant annet bestå av konkrete formler for F og G som viser hvordan (i) og (ii) kan være sanne uten at (iii) også er sann. Her er F og G altså *ikke* utsagnslogiske variabler, men de kan være *hvilke som helst* utsagnslogiske formler, for eksempel $(\mathsf{P} \to \neg\mathsf{Q})$ og $(\mathsf{R} \wedge \mathsf{P})$.

(*i*) *Alle valuasjoner gjør formelen* $(\mathsf{F} \to \mathsf{G})$ *sann.*
(*ii*) *Alle valuasjoner gjør formelen* G *sann.*
(*iii*) *Da må alle valuasjoner gjøre* F *sann.*

5.4 Gi et motsigelsesbevis for at $(\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{P}))$ er en tautologi.

Oppgaver til kapittel 6

6.1 La A være mengden $\{1, 2, 3, a, b\}$, og la følgende være relasjoner på A. For hver relasjon, avgjør hvilke av egenskapene refleksiv, irrefleksiv, transitiv, symmetrisk og anti-symmetrisk den har.

(a) $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle a, 1\rangle\}$
(b) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
(c) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
(d) $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, b\rangle\}$

6.2 La $A = \{1, 3, 6, 7, 12, 15, 17\}$, og la R være en relasjon på A som er slik at $\langle x, y\rangle \in R$ når x/y er et naturlig tall større enn 1. Hvilke elementer er med i relasjonen R? Hvilke egenskaper har R? (Her betyr x/y tallet x *delt på* y. Se forrige oppgave for relevante egenskaper.)

6.3 La $A = \{1, 2, 3\}$. For hver av deloppgavene under, finn en relasjon på A som har de angitte egenskapene. Oppgi relasjonen som en mengde av tupler.

(a) refleksiv og symmetrisk
(b) symmetrisk, anti-symmetrisk og transitiv
(c) irrefleksiv, symmetrisk og transitiv
(d) ikke-refleksiv, symmetrisk og ikke-transitiv

6.4 La E være relasjonen på *mengder* av naturlige tall slik at $\langle A, B\rangle \in E$ når det er nøyaktig ett element i $A \setminus B$. En mengde A er altså relatert til en mengde B hvis mengdedifferansen mellom A og B inneholder nøyaktig ett element. For eksempel er mengden $\{1, 2\}$ relatert til $\{1\}$ fordi mengdedifferansen er $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$, som har nøyaktig ett element. Vi har også at $\{5\}$ er relatert til $\{3\}$, fordi $\{5\} \setminus \{3\} = \{5\}$, som har ett element. Derimot er $\{1, 2, 3\}$ ikke relatert til $\{2\}$, fordi $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$, som har to elementer. Husk at det er kun *mengder* som er relaterte til hverandre; hvis A er relatert til B, så er både A og B mengder av naturlige tall.

(a) Finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A er relatert til B, og finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A *ikke* er relatert til B. Eksemplene må være forskjellige fra eksemplene gitt i oppgaveteksten.

For hver av deloppgavene under, begrunn svaret ditt: Hvis ja, forklar hvorfor; hvis nei, forklar hvorfor ikke. Hint: Her må du bruke definisjonene av begrepene symmetrisk, transitiv og irrefleksiv.

(b) Er relasjonen E symmetrisk?
(c) Er relasjonen E transitiv?
(d) Er relasjonen E irrefleksiv?