# Oppgaver til kapittel 11

**11.1** La $f$ være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall $n$. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis **basissteget**, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

*Induksjonssteget* går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall $n$, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Bruk **induksjonshypotesen** til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkluder og si hva du har bevist.

**11.2** I denne og neste oppgave skal bruke matematisk induksjon til å vise at påstanden

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$$

er sann for alle naturlige tall.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

**11.3** Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

**11.4** Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? Tips: Dette har mest har å gjøre med *formen* på argumentet.

*Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million. Basissteget går slik: Tallet $0$ er klart **mye mindre** enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for $n$, det vil si at $n$ er **mye mindre** enn én million. Dette er induksjonshypotesen. Vi skal vise at påstanden også holder for $n + 1$. Siden $n$ er **mye mindre** enn én million, må også $n + 1$ være det, fordi $n + 1$ bare er bitte litt større enn $n$. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million.*

# Oppgaver til kapittel 12

**12.1** La $S$ være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

**12.2** Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

**12.3** La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor $P$ står for en vilkårlig utsagnsvariabel og $F$ og $G$ står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg\textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \wedge G)) &= (\textsc{flip}(G) \wedge \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \vee G)) &= (\textsc{flip}(G) \vee \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på $F$ og $G$.)

I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er *ekvivalent* med $F$, for alle utsagnslogiske formler $F$. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

**12.4** Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.