Oppgaver til kapittel 15

15.1 La et førsteordens språk med signaturen $\langle a, b ; f ; P, R \rangle$ være gitt, der f og P har aritet én og R har aritet to. La $\mathcal{M}$ være en modell for dette språket med domene $\{1, 2\}$ der vi tolker a som 1, b som 2, f som $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, P som $\{1\}$ og R som $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Avgjør om modellen gjør følgende formler sanne eller ikke.

(a) $(P(a) \wedge R(f(a), b))$
(b) $\exists x(\neg P(x) \wedge R(a, x))$
(c) $\forall x R(x, f(a))$
(d) $\exists x \forall y R(x, y)$

15.2 For hver formel nedenfor, avgjør hvilke av egenskapene *gyldig*, *oppfyllbar*, *falsifiserbar* og *kontradiktorisk* formelen har. Du trenger ikke å begrunne svaret. Du kan anta at signaturen er $\langle a ; ; P, Q, R \rangle$, hvor P og Q har aritet én og R har aritet to.

(a) $(\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \exists x \neg(Px \vee Qx))$
(b) $\exists x(Px \vee Rxa)$
(c) $(\forall x Rxa \wedge \exists x \neg Rxa)$
(d) $(\neg \exists x Px \rightarrow \forall x Px)$

15.3 Gitt domenet $\{1, 2, 3\}$, spesifiser en tolkning av relasjonssymbolene P og Q som gjør følgende formler sanne samtidig, det vil si spesifiser nøyaktig én modell som gjør alle fire formlene sanne.

(i) $\forall x \exists y(Pxy \wedge Qxy)$
(ii) $\neg \exists y \forall x Qxy$
(iii) $\forall x \forall y(Pxy \rightarrow \neg Pyx)$
(iv) $(\forall x Qxx \wedge \neg \forall x \forall y Qxy)$

15.4 Bevis at følgende formel er gyldig; det vil si, vis at enhver modell gjør denne formelen sann:

$$(\forall x(Rxa \wedge Rax) \rightarrow \exists y Ryb)$$

Oppgaver til kapittel 16

16.1 La F være formelen $(\exists x \mathsf{P}x \wedge \forall x \mathsf{R}xa)$. For hver av formlene nedenfor, avgjør om formelen er en *logisk konsekvens* av formelen F eller ikke.

(a) $\exists x \mathsf{R}xx$
(b) $(\mathsf{P}b \vee \exists x \mathsf{R}xb)$
(c) $(\mathsf{P}a \rightarrow \mathsf{P}a)$
(d) $(\neg \forall x \mathsf{P}x \wedge \exists x \mathsf{R}ax)$

16.2 La F være formelen $(\mathsf{P}a \vee \neg \exists x \mathsf{R}ax)$. For hver av formlene nedenfor, avgjør om F er en *logisk konsekvens* av formelen eller ikke.

(a) $\forall x \mathsf{P}x$
(b) $\neg \forall x \mathsf{R}ax$
(c) $(\exists x \neg \mathsf{R}ax \wedge \exists x \mathsf{P}x)$
(d) $(\mathsf{P}a \rightarrow \mathsf{P}a)$

16.3 For hver av formlene nedenfor, finn en tolkning av R som gjør formelen *usann* i en modell med domene $\{1, 2, 3\}$.

(a) $(\exists x \mathsf{R}xx \rightarrow \forall x \mathsf{R}xx)$
(b) $(\exists x \exists y \mathsf{R}xy \rightarrow \exists x \mathsf{R}xx)$
(c) $(\forall x \mathsf{R}xx \rightarrow \forall x \forall y \mathsf{R}xy)$
(d) $(\forall x \exists y \mathsf{R}xy \rightarrow \forall x \mathsf{R}xx)$

16.4 Skriv følgende formler på preneks normalform.

(a) $\forall x(\mathsf{F}xb \vee \forall y \mathsf{P}y) \rightarrow \exists z \mathsf{K}az$
(b) $(\exists x \mathsf{R}xa \wedge (\mathsf{P}b \rightarrow \forall x \mathsf{R}bx))$