Oppgaver til kapittel 5

5.1 Er følgende påstander sanne eller usanne? Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel. Hvis påstanden er sann, gi et argument som beviser at den er sann. (Merk at her er F en *plassholder* for en utsagnslogisk formel og ikke en konkret utsagnslogisk formel.)

(a) Alle oddetall større enn 55 er primtall.
(b) Alle formler F slik at $\neg\mathsf{F}$ er en kontradiksjon, er gyldige.
(c) Alle tautologier har minst to konnektiver.
(d) Alle formler F som er slik at både F og $\neg\mathsf{F}$ er oppfyllbare, er kontradiksjoner.

5.2 Når vi tolker påstanden F *er sann*, må vi kjenne til konteksten for å gjøre det på riktig måte. Her er noen mulige presiseringer formulert som påstander om F. Finn ut hvilke som er logiske konsekvenser av hvilke. I tillegg, forklar hva som er forskjellen mellom (a) og (b). Tegn for eksempel opp (a), (b), (c) og (d) i en firkant og tegn $\Rightarrow$-piler som angir logisk konsekvens. For eksempel, hvis (a) er en logisk konsekvens av (b), skriv (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) Det finnes en valuasjon som gjør formelen F sann.
(b) Valuasjonen v gjør formelen F sann.
(c) Alle valuasjoner gjør formelen F sann.
(d) Det finnes ingen valuasjon som gjør formelen F usann.

5.3 Se på følgende resonnement, som har to premisser, (i) og (ii), og én konklusjon, (iii), og avgjør om det er et gyldig resonnement eller ikke. Hvis det er gyldig, forklar hvorfor; hvis ikke, gi et moteksempel som viser at det ikke er gyldig. Henvis til definisjonene når du forklarer.

Merk at F og G er *plassholdere* for utsagnslogiske formler; et moteksempel vil derfor blant annet bestå av konkrete formler for F og G som viser hvordan (i) og (ii) kan være sanne uten at (iii) også er sann. Her er F og G altså *ikke* utsagnslogiske variabler, men de kan være *hvilke som helst* utsagnslogiske formler, for eksempel $(\mathsf{P} \to \neg\mathsf{Q})$ og $(\mathsf{R} \wedge \mathsf{P})$.

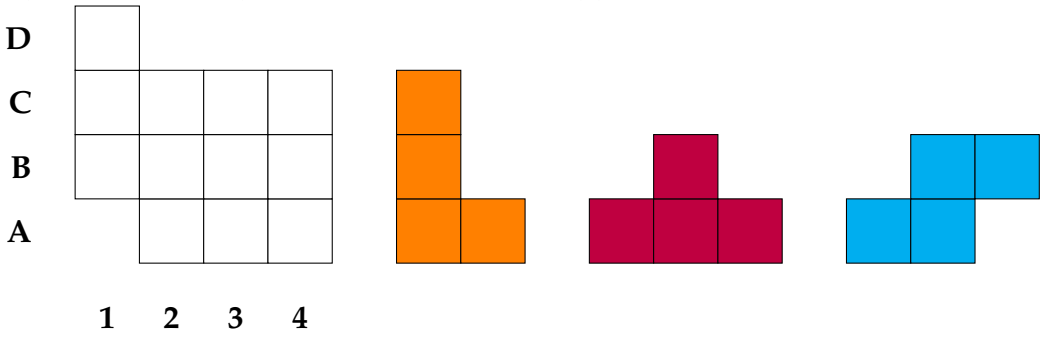
(*i*) *Alle valuasjoner gjør formelen* $(\mathsf{F} \to \mathsf{G})$ *sann.*
(*ii*) *Alle valuasjoner gjør formelen* G *sann.*
(*iii*) *Da må alle valuasjoner gjøre* F *sann.*

5.4 Gi et motsigelsesbevis for at $(\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{P}))$ er en tautologi.

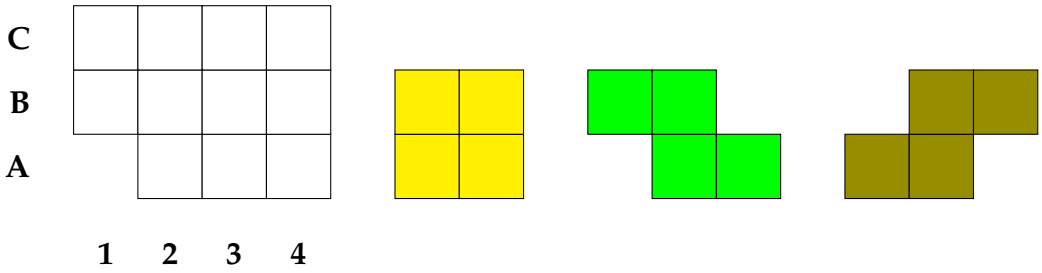
5.5 Bonusoppgave Ubongo (ingen poeng og ikke en del av de obligatoriske oppgavene): Tre studenter spiller favoritspillen deres. De konkurrerer om hvem som er raskest for å finne ut hvordan de skal plassere brikkene (ikke overlappende) for å lage figuren de fikk. Men etter en lang dag med forelesninger, har de kanskje byttet noen brikker. Er det bare et tøft puslespill? Eller er det kanskje umulig å lage figurene?

Bevis (finn argumenter som la ingen tvil) hvilken er mulig å løse, og hvilken ikke. Bruk gjerne koordinatene som angitt på figurene for å beskrive felt.

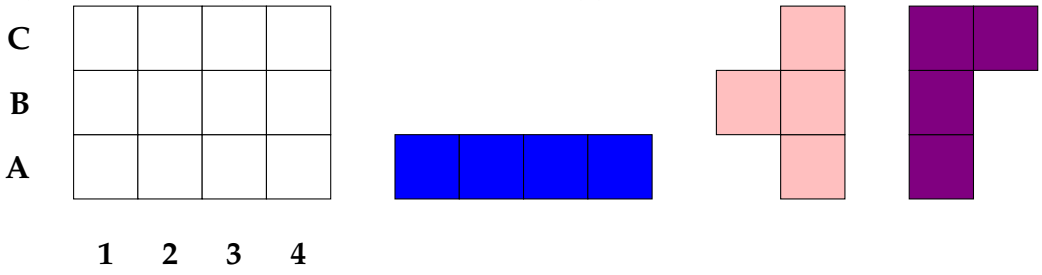
(a) Figur (venstre) og tre brikker som skal legges inn (høyre):



(b) Figur (venstre) og tre brikker som skal legges inn (høyre):



(c) Figur (venstre) og tre brikker som skal legges inn (høyre):



5.6 Bonusoppgave Kortspill (ingen poeng og ikke en del av de obligatoriske oppgavene): Kari og Ole er fortsatt sultne. Begge strekker seg etter den siste pizzabiten, men Kari kommer først. Hun smiler og sier søtt:
Jeg gir deg en sjanse. Hvis du vinner dette spillet får du pizzaen: Vi tar en vanlig kortstokk, blander den og fordeler kortene likt mellom oss. Du vinner hvis du kan vise meg et kort fra kortene dine slik at det følgende er ikke sant:
(1) Kortet er rød, eller (2) Kortet er ikke rød eller ikke en dame.

Uten flere ord reiser Ole seg og forlater rommet sint. Hvorfor?