Oppgaver til kapittel 6

6.1 La A være mengden $\{1, 2, 3, a, b\}$, og la følgende være relasjoner på A. For hver relasjon, avgjør hvilke av egenskapene refleksiv, irrefleksiv, transitiv, symmetrisk og anti-symmetrisk den har.

(a) $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle a, 1\rangle\}$
(b) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
(c) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
(d) $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, b\rangle\}$

6.2 La $A = \{1, 3, 6, 7, 12, 15, 17\}$, og la R være en relasjon på A som er slik at $\langle x, y\rangle \in R$ når x/y er et naturlig tall større enn 1. Hvilke elementer er med i relasjonen R? Hvilke egenskaper har R? (Her betyr x/y tallet x *delt på* y. Se forrige oppgave for relevante egenskaper.)

6.3 La $A = \{1, 2, 3\}$. For hver av deloppgavene under, finn en relasjon på A som har de angitte egenskapene. Oppgi relasjonen som en mengde av tupler.

(a) refleksiv og symmetrisk
(b) symmetrisk, anti-symmetrisk og transitiv
(c) irrefleksiv, symmetrisk og transitiv
(d) ikke-refleksiv, symmetrisk og ikke-transitiv

6.4 La E være relasjonen på *mengder* av naturlige tall slik at $\langle A, B\rangle \in E$ når det er nøyaktig ett element i $A \setminus B$. En mengde A er altså relatert til en mengde B hvis mengdedifferansen mellom A og B inneholder nøyaktig ett element. For eksempel er mengden $\{1, 2\}$ relatert til $\{1\}$ fordi mengdedifferansen er $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$, som har nøyaktig ett element. Vi har også at $\{5\}$ er relatert til $\{3\}$, fordi $\{5\} \setminus \{3\} = \{5\}$, som har ett element. Derimot er $\{1, 2, 3\}$ ikke relatert til $\{2\}$, fordi $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$, som har to elementer. Husk at det er kun *mengder* som er relaterte til hverandre; hvis A er relatert til B, så er både A og B mengder av naturlige tall.

(a) Finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A er relatert til B, og finn ett eksempel på to mengder, A og B, slik at A *ikke* er relatert til B. Eksemplene må være forskjellige fra eksemplene gitt i oppgaveteksten.

For hver av deloppgavene under, begrunn svaret ditt: Hvis ja, forklar hvorfor; hvis nei, forklar hvorfor ikke. Hint: Her må du bruke definisjonene av begrepene symmetrisk, transitiv og irrefleksiv.

(b) Er relasjonen E symmetrisk?
(c) Er relasjonen E transitiv?
(d) Er relasjonen E irrefleksiv?

Oppgaver til kapittel 7

7.1 La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv, surjektiv, begge deler eller ingen av delene.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}$

7.2 La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ og $C = \{a, b, c\}$. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være definert ved at $f = \{\langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \heartsuit\rangle, \langle 3, \heartsuit\rangle\}$ og $g = \{\langle \spadesuit, c\rangle, \langle \heartsuit, a\rangle, \langle \clubsuit, b\rangle\}$. Vi definerer $h : A \to C$ til å være sammensetningen av f og g, det vil si at $h(x) = g(f(x))$ for alle x.

(a) Definer h som en mengde av tupler.
(b) Hva er bildemengden til h, altså $h[A]$?

7.3 La $f : A \to A$ være definert ved $f(x) = \mathrm{id}_A(x)$. Husk at id_A er identitetsfunksjonen på A; det vil si at $\mathrm{id}_A(x) = x$ for alle $x \in A$. Fordi f er en funksjon, er den også en relasjon, og vi kan undersøke hvilke egenskaper den har.

(a) Er f en *operasjon*? Forklar.
(b) Er f en symmetrisk relasjon? Forklar.
(c) Er f en partiell ordning på A? Vis hvorfor eller hvorfor ikke.

7.4 Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av alle utsagnslogiske formler (se side 22). Vi definerer funksjonen $Z : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ved

$$Z(F, G) = (F \wedge G).$$

Merk at vi ser på $(F \wedge G)$ rent *syntaktisk*, og vi ser altså ikke på tolkningen av formelen. For eksempel er $(P \wedge Q)$ *ikke* den samme formelen som $(Q \wedge P)$, selv om de er logisk ekvivalente. Det står noen flere hint etter deloppgavene.

(a) Hva er $Z((\neg P \wedge \neg Q), \neg\neg R)$ og $Z((R \vee \neg P), (P \wedge (P \wedge R)))$?
(b) Er Z injektiv? Forklar.
(c) Hva er bildemengden til Z?
(d) Er Z surjektiv? Forklar.

Hint: Vi lar altså F og G kunne være *hvilke som helst utsagnslogiske formler*. For eksempel kan vi ha at $F = \neg(P \wedge Q)$ og $G = (P \to Q)$. Da får vi:

$$Z(\neg(P \wedge Q), (P \to Q)) = (\neg(P \wedge Q) \wedge (P \to Q))$$

Vi kan også ha:

$$Z((P \vee Q), \neg Q) = ((P \vee Q) \wedge \neg Q) \quad \text{og} \quad Z(\neg\neg\neg M, (P \wedge P)) = (\neg\neg\neg M \wedge (P \wedge P))$$

Vi ser altså bare på symbolene i formelen (syntaksen) og bryr oss *ikke* om sannhetsverdien og tolkningen (semantikken).