Oppgaver til kapittel 10

10.1 Gi en rekursiv definisjon av hver av følgende funksjoner på $\mathbb{N}$. Regn også ut de åtte første verdiene for hver funksjon. For eksempel kan funksjonen $f(n) = 2 \cdot n$ defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 2$.

(a) $f(n) = 3 \cdot n + 1$ (b) $f(n) = n^2$

10.2 La alfabetet $A = \{\mathtt{t}, \mathtt{a}, \mathtt{o}\}$. La funksjonen $\mathcal{T}$ fra A^* til heltallene være definert rekursivt ved:

$$\mathcal{T}(\Lambda) = 0$$

$$\mathcal{T}(s\mathtt{t}) = \mathcal{T}(s) + 1, \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{a}) = \mathcal{T}(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{T}(s\mathtt{o}) = \mathcal{T}(s) - 1$$

der $s \in A^*$.

(a) Regn ut $\mathcal{T}(\mathtt{t})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tatt})$, $\mathcal{T}(\mathtt{tao})$ og $\mathcal{T}(\mathtt{ottato})$.
(b) Forklar kort med egne ord hva $\mathcal{T}$ gjør.

10.3 Vi definerer funksjonen b på mengden av bitstrenger (slik denne mengden er definert i Logiske metoder) slik at den bytter enhver forekomst av $\mathtt{0}$ med $\mathtt{1}$ og vice versa. For eksempel har vi at $b(\mathtt{0}) = \mathtt{1}$, $b(\mathtt{110}) = \mathtt{001}$ og $b(\mathtt{1011100}) = \mathtt{0100011}$. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen b.

10.4 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathcal{W}$ fra utsagnslogiske formler til naturlige tall, slik at $\mathcal{W}$ teller antall forekomster av konnektivet $\wedge$. Her er noen eksempler:

$$\mathcal{W}\big((P \wedge Q)\big) = 1 \qquad \mathcal{W}\big(((P \to Q) \vee R)\big) = 0 \qquad \mathcal{W}\big((P \wedge (Q \wedge P))\big) = 2$$

Oppgaver til kapittel 11

11.1 La f være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall n. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis **basissteget**, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall n, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Bruk **induksjonshypotesen** til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkluder og si hva du har bevist.

11.2 I denne og neste oppgave skal bruke matematisk induksjon til å vise at påstanden

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$$

er sann for alle naturlige tall.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

11.3 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

11.4 Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? Tips: Dette har mest har å gjøre med *formen* på argumentet.

*Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million. Basissteget går slik: Tallet 0 er klart **mye mindre** enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for n, det vil si at n er **mye mindre** enn én million. Dette er induksjonshypotesen. Vi skal vise at påstanden også holder for $n + 1$. Siden n er **mye mindre** enn én million, må også $n + 1$ være det, fordi $n + 1$ bare er bitte litt større enn n. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er **mye mindre** enn én million.*

Oppgaver til kapittel 12

12.1 La S være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.2 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

12.3 La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg\textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \wedge G)) &= (\textsc{flip}(G) \wedge \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \vee G)) &= (\textsc{flip}(G) \vee \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på F og G.)

I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er *ekvivalent* med F, for alle utsagnslogiske formler F. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.4 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.