Oppgaver til kapittel 1

1.1 La A stå for mengden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, B stå for mengden $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ og C stå for mengden $\{2, 3, 5, 7\}$. Regn ut følgende mengder. Du trenger kun å gi det endelige svaret.

(a) $A \cup B$
(b) $A \cap B$
(c) $A \setminus B$
(d) $\emptyset \setminus (A \setminus B)$
(e) $(A \setminus B) \setminus C$
(f) $(B \cup C) \setminus A$
(g) $((A \cup B) \setminus A) \setminus B$
(h) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$

Oppgaver til kapittel 2

2.1 La utsagnsvariabelen S stå for «jeg sier sannheten» og E stå for «jeg er under ed». Finn utsagnslogiske formler som representerer følgende utsagn, hvor du ikke bruker andre konnektiver enn $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$:

(a) *Jeg sier sannheten hvis jeg er under ed.*
(b) *Jeg sier sannheten bare hvis jeg er under ed.*
(c) *Jeg er under ed, men sier ikke sannheten.*
(d) *Jeg sier sannheten hvis og bare hvis jeg ikke er under ed.*

Oppgaver til kapittel 3

3.2 Se på disse seks formlene. Oppgi hvilke som er ekvivalente med hverandre. For to av formlene (du velger selv), forklar kort hvorfor de er ekvivalente. Hint: Det er tre par av formler.

(a) $(P \rightarrow (Q \wedge R))$
(b) $((\neg P \vee \neg Q) \vee R)$
(c) $(P \vee (Q \rightarrow R))$
(d) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$
(e) $((P \wedge Q) \rightarrow R)$
(f) $(\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R))$

Oppgaver til kapittel 4

4.3 (a) Anta at vi har premissene $(A \vee B)$, $(A \rightarrow C)$ og $(C \wedge B)$, og konklusjonen A. Er dette et gyldig argument? Begrunn.
(b) Anta at vi har premissene $(A \wedge C)$ og $(C \rightarrow B)$, og konklusjonen $(A \wedge B)$. Er dette et gyldig argument? Begrunn.

Oppgaver til kapittel 5

5.4 Gi et motsigelsesbevis for at $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ er en tautologi.

Oppgaver til kapittel 6

6.2 La $A = \{1, 3, 6, 7, 12, 15, 17\}$, og la R være en relasjon på A som er slik at $\langle x, y\rangle \in R$ når x/y er et naturlig tall større enn 1. Hvilke elementer er med i relasjonen R? Hvilke egenskaper har R: refleksiv, irrefleksiv, transitiv, symmetrisk og anti-symmetrisk? (Her betyr x/y tallet x *delt på* y.)

Oppgaver til kapittel 7

7.1 La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv, surjektiv, begge deler eller ingen av delene.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}$

Oppgaver til kapittel 8

8.2 I denne oppgaven skal vi bevise en av De Morgans lover, nemlig at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B. Det gjør vi ved å først vise at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, så vise $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vi skal ikke bruke Venn-diagrammer eller andre illustrasjoner i dette beviset, men derimot ord, symboler og setninger. Det holder med korte forklaringer, så lenge man får med essensen i beviset.

(a) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A \cup B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A \cup B}$.
(c) Bruk resultatene i (a) og (b) til å konkludere med at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B.

Hint: For å vise at en mengde A er en delmengde av en mengde B, må vi vise at alle elementene av A er også elementer av B.

8.3 La $\mathcal{H}$ være mengden av alle positive halv-tall. Vi har altså at

$$\mathcal{H} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}.$$

Vis at $\mathcal{H}$ har samme kardinalitet som de naturlig tallene, altså at $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$.

Oppgaver til kapittel 9

9.1 La $U = \{a, b, c, d\}$, og la R være relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på U.

(a) Hva er den refleksive tillukningen av R?

(b) Hva er den symmetriske og transitive tillukningen av R? (Det vil si tillukkingen av R som er samtidig lukket under både symmetri og transitivitet.)

Oppgaver til kapittel 10

10.1 Gi en rekursiv definisjon av hver av følgende funksjoner på $\mathbb{N}$. Regn også ut de åtte første verdiene for hver funksjon. For eksempel kan funksjonen $f(n) = 2 \cdot n$ defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 2$.

(a) $f(n) = 3 \cdot n + 1$ (b) $f(n) = n^2$

10.4 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathcal{W}$ fra utsagnslogiske formler til naturlige tall, slik at $\mathcal{W}$ teller antall forekomster av konnektivet $\wedge$. Her er noen eksempler:

$$\mathcal{W}\big((P \wedge Q)\big) = 1 \qquad \mathcal{W}\big(((P \to Q) \vee R)\big) = 0 \qquad \mathcal{W}\big((P \wedge (Q \wedge P))\big) = 2$$

Oppgaver til kapittel 11

11.2 I denne og neste oppgave skal bruke matematisk induksjon til å vise at påstanden

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n+1)$$

er sann for alle naturlige tall.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

11.3 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.

Oppgaver til kapittel 12

12.3 La funksjonen FLIP på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$\begin{aligned}
\text{FLIP}(P) &= P \\
\text{FLIP}(\neg F) &= \neg \text{FLIP}(F) \\
\text{FLIP}((F \wedge G)) &= (\text{FLIP}(G) \wedge \text{FLIP}(F)) \\
\text{FLIP}((F \vee G)) &= (\text{FLIP}(G) \vee \text{FLIP}(F)) \\
\text{FLIP}((F \to G)) &= (\text{FLIP}(G) \to \text{FLIP}(F))
\end{aligned}$$

(Legg merke til at funksjonen bytter rekkefølge på F og G.)

I denne og neste oppgave skal vi bevise ved strukturell induksjon at $\text{FLIP}(\text{FLIP}(F))$ er *ekvivalent* med F, for alle utsagnslogiske formler F. Husk at mengden av utsagnslogiske formler er definert som den minste mengden som inneholder mengden av utsagnsvariabler og som er lukket under det å legge til konnektiver. *Hint:* Du må bruke denne definisjonen.

(a) Presiser hva **påstanden** som skal bevises er.
(b) Bevis **basissteget**.

12.4 Se forrige oppgave.

(a) Presiser hva **induksjonshypotesen** er.
(b) Bevis **induksjonssteget** og si hva **konklusjonen** er.