IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2025 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til kursansvarlig.

Sist oppdatert: 18. september 2025

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.
- En oversikt over symboler er vedlagt. (Nederst på siden) Her beskrives det hvordan du kan skrive symboler, og du kan også bare kopiere dem. Hvis du ikke vet hvordan du skal skrive et symbol, velg en måte og gi en forklaring på hva det skal representere.

Språk / Language:

- Teksten i oppgaven er på bokmål. Det finnes ingen engelsk eller nynorsk oversettelse. En ordliste med engelske oversettelser av de fleste ordene som brukes i eksamen er vedlagt. (Nederst på siden)
- Du kan skrive svar på norsk eller engelsk (eller en blanding så lenge det er lett å forstå).

Kommentar: Om sensur og karaktergivning: Det som er utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Den totale poengsummen brukes som veiledning for karakteren. En grov tommelfingerregel for karakteren er følgende.

Ca. 120 poeng (ca. 86 %): A
Ca. 100 poeng (ca. 71 %): B
Ca. 80 poeng (ca. 57 %): C
Ca. 60 poeng (ca. 43 %): D
Ca. 40 poeng (ca. 29 %): E

Merk at dette er *omtrentlige* grenser som vurderes og justeres i lys av oppgavesettets vanskelighetsgrad og form.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Kommentar: Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Disse er tilfeldig valgt fra en stor mengde av oppgaver. Poenggivningen er slik at det ikke er noen forskjell mellom ubesvart og feil svar. Hver

oppgave teller ett poeng, og for å få den totale poengsummen for den første delen skalerer vi poengene med formelen $2 \cdot \max(n - 35, 0)$, hvor tallet n er antall spørsmål som er korrekt besvart, og setter maksimal poengsum til 60 poeng. Dette gjør det enklere å korrigere for gjetning. Hvis man gjetter helt tilfeldig på alle oppgavene får man i snitt null poeng. En gjetning er riktignok ofte ledet av en trent intuisjon, og det vil derfor som regel lønne seg å gjette. Poengsummen representerer på denne måten hvor mange spørsmål man faktisk vet det riktige svaret på.

Større oppgaver [80 poeng]

Kommentar: Den andre delen består av større oppgaver. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. En mer detaljert poenggivning er angitt for hver oppgave.

1 Utsagnslogikk [10 poeng]

La $M = \{(\neg P \wedge Q), (\neg P \rightarrow R), (Q \wedge R)\}$.

(a) [2 poeng] Finn en valuasjon som oppfyller alle formlene i M.

Valuasjonen som gjør P usann, Q sann og R sann oppfyller M.

(b) [2 poeng] Finn en valuasjon som falsifiserer alle formlene i M.

Valuasjonen som gjør P usann, Q usann og R usann falsifiserer M.

(c) [3 poeng] Er $(P \rightarrow \neg P)$ en logisk konsekvens av M? Hvis ja, forklar hvorfor, hvis nei, gi en valuasjon som moteksempel.

Ja. For at M skal være sann, må $(\neg P \wedge Q)$ valuert til sann, som valuerer P som usann. Da blir $(P \rightarrow \neg P)$ valuert som sann. Med andre ord, når M er sann må også $(P \rightarrow \neg P)$ også være sann, som gjør at P er en logisk konsekvens av M.

(d) [3 poeng] Er $(\top \rightarrow \neg R)$ en logisk konsekvens av M? Husk at $\top$ er symbolet "topp", som blir sann for enhver valuasjon. Hvis ja, forklar hvorfor, hvis nei, gi en valuasjon som moteksempel.

Nei. Valuasjonen som gjør P usann, Q sann og R sann gjør alle formlene i M sanne, men $(\top \rightarrow \neg R)$ blir usann.

Kommentar: Et poeng uttelling i (c) og (d) dersom svaret er riktig, men forklaringen eller moteksemplet er galt. To poeng for riktig svar og delvis riktig forklaring eller moteksempel.

2 Kvantifiserte utsagn [10 poeng]

Antar at variablene x, y refererer til tredimensjonale objekter.
La K, P, O, V være relasjonssymboler med følgende tolkninger:

- Kx tolkes som «x *er en kule*».
- Px tolkes som «x *er et prisme*».
- Vxy tolkes som «x *har større volum enn* y»
- Oxy tolkes som «x *har større overflate enn* y»

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn:

(a) [2 poeng] Ingenting er både en kule og et prisme.

$\neg\exists x(Kx \wedge Px)$ eller $\forall x\neg(Kx \wedge Px)$

(b) [2 poeng] Alle kuler har større volum enn alle prismer.

$\forall x\forall y((Kx \wedge Py) \rightarrow Vxy)$

(c) [2 poeng] Det finnes intet prisme som har større volum enn alle prismer.

$\neg\exists x\forall y(Px \wedge Py \rightarrow Vxy)$ eller $\forall x\neg\exists y(Px \wedge Py \rightarrow Vyx)$

(d) [2 poeng] Det finnes en kule og et prisme der kulen har større volum enn prismen, men prismen har større overflate enn kulen.

$\exists x\exists y(Kx \wedge Py \wedge Vxy \wedge Oyx)$

(e) [2 poeng] Det finnes ikke et prisme som har større overflate og større volum enn alle kuler.

$\neg\exists x\forall y((Px \wedge Ky) \rightarrow (Oxy \wedge Vxy))$

Kommentar: To poeng for ekvivalent formel i alle oppgavene. Det trekkes ikke for unødvendig parentes eller syntaks som er feil, men helt tydelig. Det kan gis delvis uttelling dersom svaret er nesten riktig.

3 Relasjoner og funksjoner [10 poeng]

Vi har følgende relasjoner på $\{1, 2, 3\}$:



Her representerer en pil fra x til y at tuppelet $\langle x, y\rangle$ er med i relasjonen.

(a) [2 poeng] Forklar hvorfor R er en funksjon.

> R er en funksjon siden den er en binærrelasjon der alle elementene 1, 2 og 3 relaterer til nøyaktig ett element. Med andre ord, alle elementene relaterer til noe, og ingenting relaterer til mer enn ett element.

(b) [2 poeng] Forklar hvorfor S *ikke* er en funksjon.

> S er ikke en funksjon siden 1 ikke relaterer til noe, og siden 3 relaterer til både 2 og 3.

(c) [2 poeng] Er R injektiv? Er den surjektiv? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

> R er ikke injektiv, siden både 2 og 3 blir relatert til 3. Den er ikke surjektiv, siden 1 ikke blir relatert til.

(d) [2 poeng] Hva er den symmetriske tillukningen av S? Oppgi svaret som en mengde av tupler.

> Den symmetriske tillukningen til S er $\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\} = S \cup \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$.

(e) [2 poeng] Er $R \cup S$ en ekvivalensrelasjon? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

> Relasjonen $R \cup S$ er ikke en ekvivalensrelasjon, siden den for eksempel ikke er refleksiv, siden $\langle 2,2\rangle$ ikke er med. Den er heller ikke transitiv.

Kommentar: Delvis trekk dersom forklaringene er mangelfulle. I (b) kreves én av grunnene for full utdeling. I (c) gis det 1 poeng for riktig injektiv forklaring og 1 poeng for riktig surjektiv forklaring. 1 poeng i oppgave (d) dersom ett tuppel mangler. 1 poeng i oppgave (e) for riktig svar, men med manglende eller mangelful forklaring.

4 Rekursivt definerte funksjoner [10 poeng]

Vi lar A være språket over alfabetet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$. Husk at A kan defineres induktivt som den minste mengde slik at $\Lambda \in A$, altså den tomme strengen er med i A (basissteg), og hvis $s \in A$, så er også $s\texttt{a} \in A$, $s\texttt{b} \in A$ og $s\texttt{c} \in A$ (induksjonssteg).

Vi vil nå se på mengden av strenger i A som alltid har partall antall $\texttt{b}$ ved siden av hverandre av gangen. Med andre ord, om man leser strengene fra venstre til høyre, er det aldri nøyaktig én, tre, eller odde forekomst av en $\texttt{b}$ av gangen. Vi kaller denne mengden for B. For eksempel er strengene Λ, $\texttt{a}$, $\texttt{bb}$, $\texttt{ca}$, $\texttt{abbc}$, $\texttt{bbbbcbba}$ med i B, men $\texttt{b}$, $\texttt{abbb}$, $\texttt{abc}$, $\texttt{bbacb}$, $\texttt{cabbababb}$ er ikke med i B.

(a) [3 poeng] Definer mengden B induktivt.

Vi definerer B til å være den minste mengden slik at $\Lambda \in B$, og dersom s er med i B, er $s\texttt{a}$, $s\texttt{bb}$ og $s\texttt{c}$ med i B.

Vi lager nå en funksjon $R : A \to B$, som dobler antall $\texttt{b}$-er i strengene. For eksempel er $R(\texttt{abc}) = \texttt{abbc}$, $R(\texttt{ac}) = \texttt{ac}$ og $R(\texttt{abcabba}) = \texttt{abbcabbbba}$.

(b) [4 poeng] Definer funksjonen R rekursivt.

Basissteget til definisjonen er $R(\Lambda) = \Lambda$. Videre får vi at dersom $s \in A$, er

$$R(s\texttt{a}) = R(s)\texttt{a} \qquad R(s\texttt{b}) = R(s)\texttt{bb} \qquad R(s\texttt{c}) = R(s)\texttt{c}$$

La nå *summen* til en streng i A være (antall $\texttt{a}$-er) + (antall $\texttt{b}$-er) $\cdot 2$ + (antall $\texttt{c}$-er) $\cdot 3$. For eksempel blir summen til $\texttt{abc} = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$ og summen til $\texttt{cabba} = 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9$. Dette betyr at hver forekomst av $\texttt{a}$ teller én gang, forekomst av $\texttt{b}$ to ganger og forekomst av $\texttt{c}$ tre ganger.

(c) [3 poeng] Gi en rekursiv definisjon av en funksjon $S : A \to \mathbb{N}$ som regner ut summen av en streng i A.

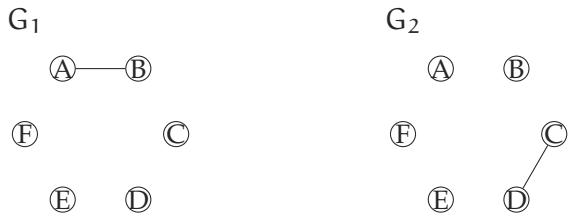
Basissteget blir at $S(\Lambda) = 0$. Dersom $s \in A$, har vi at

$$S(s\texttt{a}) = S(s) + 1 \qquad S(s\texttt{b}) = S(s) + 2 \qquad S(s\texttt{c}) = S(s) + 3$$

Kommentar: Alle oppgavene gir 1 poeng for basissteget, og resten av poengene for resten. Dersom Λ ikke er med i definisjonen, trekkes 0.5 poeng.

5 Kombinatorikk og grafer

La $\mathcal{G}$ være mengden av alle enkle grafer med seks unike noder $V = \{A, B, C, D, E, F\}$. Merk at nodene er ulike, så grafene $G_1 = \langle V, \{\{A, B\}\}\rangle$ og $G_2 = \langle V, \{\{C, D\}\}\rangle$ (som er visualisert nedenfor) er forskjellige.



(a) [2 poeng] Hvor mange grafer i $\mathcal{G}$ har nøyaktig én kant?

Vi må velge to noder som kanten skal være imellom. Det blir uordnet trekk uten tilbakelegg. Vi får $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$.

(b) [2 poeng] Hvor mange kanter er det i grafen i $\mathcal{G}$ som har flest kanter, altså den komplette grafen over 6 noder?

Den komplette grafen over 6 noder har én kant for hvert par av noder. Antall par av to noder er gitt ved $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$.

(c) [3 poeng] Hvor mange grafer i $\mathcal{G}$ har nøyaktig tre kanter og inneholder en sykel?

Dette blir det samme som å velge tre noder, der vi legger en kant mellom hvert par av de tre nodene. Vi får $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$.

(d) [3 poeng] Hvor mange grafer i $\mathcal{G}$ har nøyaktig to kanter?

Vi må velge to par av noder, men parene kan ikke være like. Det er $\binom{15}{2} = 15$ par av noder, så vi får $\binom{15}{2} = \frac{15!}{13!\cdot 2!} = \frac{15\cdot 14}{2\cdot 1} = \frac{210}{2} = 105$.
Vi kan også tenke på det slik: Det er $\binom{6}{2} = 15$ måter å velge det første paret av noder. Andre gang vi velger, må vi velge et annet par, og da er det $15 - 1 = 14$ muligheter. Vi må også ta hensyn for at vi får den samme grafen uavhengig av rekkefølgen vi velger de to kantene vi velger, så vi får totalt $\frac{15\cdot 14}{2} = \frac{210}{2} = 105$ grafer i $\mathcal{G}$ med nøyaktig to kanter.

Kommentar: Ingen forklaring nødvendig. Full utdeling for å oppgi korrekt binomialkoeffisient uten å regne den ut. I (d) gis det 1.5 poeng for (15 + 14) og 2 poeng for 210.

6 Formelle språk [10 poeng]

La alfabetet $A = \{0, 1\}$ være gitt. I denne oppgaven er alle språkene over A, og alle de regulære uttrykkene er strenger over A og symbolene Λ, `(`, `)`, `|` og `*`. Det vil si at ingen andre symboler er tillatt i de regulære uttrykkene.

(a) [2 poeng] Finn et regulært utrykk som representerer strengene som starter med `10` og slutter med `01`.

`(10(0|1)*01)|101`. Her er `10(0|1)*01` også godkjent.

(b) [2 poeng] Finn et regulært utrykk som representerer strengene av nøyaktig lengde to.

For eksempel `(0|1)(0|1)` eller `(00|01|10|11)`.

(c) [2 poeng] Finn en streng som er med i språket representert av `(00|1)*`, men ikke med i språket representert av `(0|1)(01|00|1)*`.

For eksempel Λ, `00` eller `0000`.

La følgende grammatikk uttrykke språket G. Startsymbolet er som vanlig S.

$$S \to 10S \mid S01 \mid T$$
$$T \to 11 \mid 00 \mid \Lambda$$

(d) [2 poeng] Finn en streng av lengde fire som *ikke* er med i G.

For eksempel `0000`, `1111` eller `0110`.

(e) [2 poeng] Finn et regulært uttrykk som representerer språket G.

For eksempel `(10)*(00|11|`Λ`)(01)*`.

Kommentar: De regulære uttrykkene i (a), (b) og (e) må definere det korrekte språket med de tillatte symbolene, men det trekkes ikke for alternative løsninger eller omveier. Dersom uttrykkene er nærme, men ikke korrekte, kan det gis delvis utdeling.

7 Strukturell induksjon [10 poeng]

La funksjonen $\texttt{flip}$ være på bitstrenger og funksjonene $\texttt{len}$ og $\texttt{sum}$ være fra bitstrenger til naturlige tall, rekursivt definert ved:

Basissteger for $\texttt{flip}$, $\texttt{len}$ og $\texttt{sum}$:

$$\texttt{flip}(\texttt{0}) = \texttt{1} \qquad \texttt{len}(\texttt{0}) = 1 \qquad \texttt{sum}(\texttt{0}) = 0$$
$$\texttt{flip}(\texttt{1}) = \texttt{0} \qquad \texttt{len}(\texttt{1}) = 1 \qquad \texttt{sum}(\texttt{1}) = 1$$

Rekursionssteger for $\texttt{flip}$, $\texttt{len}$ og $\texttt{sum}$: For alle bitstreng $\texttt{b}$ la

$$\texttt{flip}(\texttt{b0}) = \texttt{flip}(\texttt{b})\texttt{1} \qquad \texttt{len}(\texttt{b0}) = \texttt{len}(\texttt{b}) + 1 \qquad \texttt{sum}(\texttt{b0}) = \texttt{sum}(\texttt{b})$$
$$\texttt{flip}(\texttt{b1}) = \texttt{flip}(\texttt{b})\texttt{0} \qquad \texttt{len}(\texttt{b1}) = \texttt{len}(\texttt{b}) + 1 \qquad \texttt{sum}(\texttt{b1}) = \texttt{sum}(\texttt{b}) + 1$$

Intuitivt kan vi si at $\texttt{flip}$ bytter mellom sifrene i bitstrengen, $\texttt{len}$ regner ut lengden av bitstrengene, og $\texttt{sum}$ regner ut tverrsummen av bitstrengene, altså summen av sifrene.

(a) [1 poeng] Hva blir $\texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{00101}))$? Du trenger ikke vise utregningen.

$\texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{00101})) = \texttt{sum}(\texttt{11010}) = 3$

(b) [1 poeng] Hva blir $\texttt{sum}(\texttt{011}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{011})) - \texttt{len}(\texttt{011})$? Du trenger ikke vise utregningen.

$\texttt{sum}(\texttt{011}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{011})) - \texttt{len}(\texttt{011}) = 2 + \texttt{sum}(\texttt{100}) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0.$

(c) [8 poeng] Vis ved strukturell induksjon at $\texttt{sum}(\texttt{b}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})) - \texttt{len}(\texttt{b}) = 0$ for enhver bitstreng $\texttt{b}$. Spesifiser tydelig hva som er basissteget, induksjonshypotesen og induksjonssteget.

Vi starter med å vise at påstanden er sann for basismengden, altså $\texttt{0}$ og $\texttt{1}$. Vi får

$$\texttt{sum}(\texttt{0}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{0})) - \texttt{len}(\texttt{0}) = 0 + \texttt{sum}(\texttt{1}) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\texttt{sum}(\texttt{1}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{1})) - \texttt{len}(\texttt{1}) = 1 + \texttt{sum}(\texttt{0}) - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

Induksjonshypotesen vår er at $\texttt{sum}(\texttt{b}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})) - \texttt{len}(\texttt{b}) = 0$ for en vilkårlig valgt bitstreng $\texttt{b}$.
I induksjonssteget skal vi vise at

$$\texttt{sum}(\texttt{b0}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b0})) - \texttt{len}(\texttt{b0}) = 0 \quad \text{og} \quad \texttt{sum}(\texttt{b1}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b1})) - \texttt{len}(\texttt{b1}) = 0$$

Vi får:

$$\begin{aligned}\texttt{sum}(\texttt{b0}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b0})) - \texttt{len}(\texttt{b0}) &= \texttt{sum}(\texttt{b}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})\texttt{1}) - \texttt{len}(\texttt{b}) - 1 \\ &= \texttt{sum}(\texttt{b}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})) + 1 - \texttt{len}(\texttt{b}) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

der vi brukte induksjonshypotesen vår i nest siste steg. Tilsvarende får vi:

$$\begin{aligned}\texttt{sum}(\texttt{b1}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b1})) - \texttt{len}(\texttt{b1}) &= \texttt{sum}(\texttt{b}) + 1 + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})\texttt{0}) - \texttt{len}(\texttt{b}) - 1 \\ &= \texttt{sum}(\texttt{b}) + 1 + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})) - \texttt{len}(\texttt{b}) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Vi har ved strukturell induksjon vist at påstanden $\texttt{sum}(\texttt{b}) + \texttt{sum}(\texttt{flip}(\texttt{b})) - \texttt{len}(\texttt{b}) = 0$ er sann for alle bistrenger $\texttt{b}$.

Kommentar: I oppgave (c) må poengene gis i helhet med hele svaret, men det gis omtrent to poeng for basissteget, to poeng for korrekt og tydelig formulert induksjonshypotese, tre poeng for induksjonssteget og et poeng for strukturen. Det trekkes 0.5 poeng dersom basismengden er $\{\Lambda\}$ og ikke $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

8 Naturlig deduksjon [10 poeng]

(a) [2 poeng] Hva må stå i boksene [1] og [2] for at følgende utledning i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Q]^{1}}{\boxed{1}}\vee_{I} \qquad \neg(Q \vee \neg Q)}{\boxed{2}}\to_{E}}{Q}\,RAA_{1}$$

[1]: $(Q \vee \neg Q)$ [2]: $\bot$

(b) [4 poeng] Hva må stå i boksene [3], [4], [5] og [6] for at følgende bevis i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^{2}}{(Q \vee R)}\wedge_{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^{2}}{\boxed{4}}\boxed{3} \qquad [Q]^{1}}{\bot}\to_{E}}{R}\bot \qquad [R]^{1}}{\boxed{5}}\vee_{E_1}}{((Q \vee R) \wedge \neg Q) \to R}\,\boxed{6}_{2}$$

[3]: $\wedge_E$ [4]: $\neg Q$ [5]: R [6]: $\to_I$

Anta at vi legger til følgende slutningsregel i naturlig deduksjon:

$$\dfrac{P \qquad P \vee Q}{P \wedge Q}\wedge_{I}$$

(c) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *sunn*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Kalkylen er ikke sunn, fordi den kan utlede en konklusjon som ikke er en logisk konsekvens av premissene. Med denne regelen kan vi gi en utledning av Q, med P som eneste antakelse, uansett hva P og Q er.

$$\dfrac{\dfrac{P \qquad \dfrac{P}{P \vee Q}\vee_{I}}{P \wedge Q}\wedge_{I}}{Q}\wedge_{E}$$

(d) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *komplett*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Kalkylen er komplett, fordi det å legge til en regel ikke kan begrense antall formler som kan bevises.

Kommentar: I (a) gis ett poeng for hvert riktig svar. Et halvt poeng gis for $(\neg Q \vee Q)$ (hvor rekkefølgen er byttet). Ingen forklaring er nødvendig her. I (b) gis ett poeng for hvert riktig svar. Det å skrive $\wedge_E$ som $E\wedge$, "og-eliminasjon" eller tilsvarende, godkjennes. I (c) og (d) gis ett poeng for riktig svar og ett poeng for riktig forklaring. Det er ikke nødvendig å gi et eksempel. Det kan gis et halvt poeng for delvis riktig forklaring. Dersom begrepene sunnhet og kompletthet er blandet sammen, men forklaringene ellers er korrekte, godtas dette. En besvarelse med kun "nei" for (c) og "ja" for (d) gir to poeng. En besvarelse med kun "ja" for (c) og "nei" for (d) gir null poeng.